**Olimpiada Naţională de Matematică**
**Etapa Naţională, Braşov, 2 aprilie 2013**

**CLASA a X-a**

**Soluţii şi bareme**

**Problema 1.** Să se rezolve ecuaţia: $2^{\sin^4 x-\cos^2 x}-2^{\cos^4 x-\sin^2 x}=\cos 2x$.
**Soluţie.** Ecuaţia se scrie echivalent $2^{\sin^4 x+\sin^2 x}-2^{\cos^4 x+\cos^2 x}=2\cos 2x$. Să observăm că

$$\begin{aligned}\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^4 x-\sin^2 x&=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\cos^2 x-\sin^2 x\\&=2\cos 2x,\end{aligned}$$

........................................................................................ 3 puncte
şi ecuaţia devine $2^{\sin^4 x+\sin^2 x}+\sin^4 x+\sin^2 x=2^{\cos^4 x+\cos^2 x}+\cos^4 x+\cos^2 x$.
........................................................................................ 1 punct
Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=2^t+t$ este strict crescătoare, deci injectivă.
........................................................................................ 2 puncte
aşadar obţinem $\sin^4 x+\sin^2 x=\cos^4 x+\cos^2 x$, adică $2\cos 2x=0$, cu soluţiile $x\in\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}|k\in\mathbb{Z}\right\}$ . . 1 punct

**Problema 2.** Se consideră numerele complexe distincte $a,b,c,d$. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) Pentru orice $z\in\mathbb{C}$ are loc inegalitatea $|z-a|+|z-b|\geq|z-c|+|z-d|$;
ii) Există $t\in(0,1)$ astfel încât $c=ta+(1-t)b$ şi $d=(1-t)a+tb$.
**Soluţie.** ii)$\Longrightarrow$i) Avem

$$|z-c|=|z-ta-(1-t)b|\leq t|z-a|+(1-t)|z-b|.$$

Analog,

$$|z-d|\leq(1-t)|z-a|+t|z-b|.$$

Prin adunare se obţine concluzia. ........................................................ 2 puncte
i)$\Longrightarrow$ii) Pentru $z=a$, rezultă

$$|a-b|\geq|a-c|+|a-d|,$$

iar pentru $z=b$

$$|a-b|\geq|b-c|+|b-d|.$$

........................................................................................ 2 puncte
Prin adunare,

$$2|a-b|\geq|a-c|+|a-d|+|b-c|+|b-d|.$$

Dar

$$\begin{aligned}|a-c|+|b-c|&\geq|a-b|,\\|a-d|+|b-d|&\geq|a-b|,\end{aligned}$$

şi deducem că toate inegalităţile devin egalităţi. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

În particular, din

$$|a-c|+|b-c|=|a-b|$$

rezultă că există $t_1 \in (0,1)$ astfel ca $c = t_1 a + (1-t_1)\,b$. Analog, există $t_2 \in (0,1)$ astfel ca $d = t_2 a + (1-t_2)\,b$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

Arătăm că $t_1+t_2=1$. Avem $|a-c|+|b-c|=|a-b|=|b-c|+|b-d|$, deci $|a-c|=|b-d|$. Înlocuind, obţinem

$$(1-t_1)\,|a-b| = t_2\,|b-a|\,,$$

de unde concluzia. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

**Problema 3.** Să se determine toate funcţiile injective $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care satisfac relaţia

$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|\,,$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$.

**Soluţie.** Din relaţia dată deducem

$$|f(x+1)-f(x)| \le 1,$$

deci $f(x+1)-f(x)\in\{-1,0,1\}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

Cum $f$ e injectivă, rezultă $f(x+1)-f(x)\in\{-1,1\}$, pentru orice $x$.

Observăm că dacă $f$ verifică ipoteza, atunci şi $-f$ o verifică. Prin urmare, putem presupune că $f(1)-f(0)=1$.

Avem $f(2)-f(1)=\pm1$. Dacă $f(2)-f(1)=-1$, atunci $f(2)=f(0)$, contradicţie, deci $f(2)=f(0)+2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 puncte

Rezultă imediat prin inducţie că $f(n)=f(0)+n$, pentru orice $n$ natural.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

Tot inductiv rezultă $f(-n)=f(0)-n$, pentru orice $n$ natural. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

În concluzie, funcţiile căutate nu pot fi decât de forma $f(x)=\pm x+k$, pentru orice $x$, $k$ fiind un întreg arbitrar.. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

Se verifică uşor că aceste funcţii verifică relaţia din ipoteză. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 punct

**Problema 4.** a) Să se arate că

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}<m,$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$.

b) Fie $p_1,p_2,\ldots,p_n$ numerele prime mai mici decât $2^{100}$. Să se arate că

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}<10.$$

**Soluţie.** a) Inegalitatea se obţine prin inducţie. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 puncte

b) Numerele $p_ip_jp_kp_l$, unde $1\le i\le j\le k\le l\le n$, sunt distincte două câte două şi mai mici decât $2^{400}$.

Avem atunci

$$\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)^4 \le 4!\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le n}\frac{1}{p_ip_jp_kp_l} < 24\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{400}}\right).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 puncte

Folosind inegalitatea de la a), deducem că

$$24\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^{400}}\right) < 24\cdot 400 < 10000,$$

de unde concluzia. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2 puncte