# OLIMPIADA NAȚIONALĂ
## DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

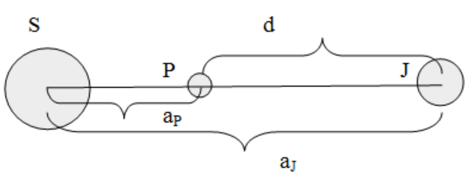
**IAȘI**
**EDIȚIA a XXI-a**
24-29 MAI 2024
PROBA TEORETICĂ SCRISĂ
BAREM
CATEGORIA SENIORI 2

- **Se punctează oricare alte formulări/modalități de rezolvare corectă a cerințelor.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.**
- **Durata probei este de 4 ore.**

**Subiectul I (10 puncte)**

1. D
2. C
3. C
4. B 34,97min

Rezolvare:




$d = a_J - a_P = 4{,}204.1{,}496.10^{11} m;$

$t = \frac{d}{v} = \frac{6{,}289.10^{11}}{2{,}997.10^{8}} = 2098 s = 34{,}966 min;$

5. B
6. C
7. D
8. Scala pixelului = $\frac{3{,}27 \times 10^{-6}}{1{,}2}\ rad = 0{,}56''$. Răspuns A.
9. Grosismentul se poate exprima ca:

$$G = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} = \frac{FOV_{oc}}{FOV_{tot}} \Rightarrow$$

$$FOV_{tot} = \frac{FOV_{oc} \times f_{oc}}{f_{ob}} = \frac{36 \times 0,24}{1,2} = 7,2°$$

Răspuns B.

10. Răspuns A.

| **Rezolvare** |
| --- |
| Pentru calculul diametrului unghiular în secunde de arc $\theta'' = 206265\frac{D}{d}$ |
| Diametrul real $D = 2 \cdot v \cdot t = 2000\text{km/s} \cdot 3,16 \cdot 10^{7}\text{s}=6,32 \cdot 10^{10}\text{km}$ |
| Diametrul unghiular după un an va fi $\theta'' = 206265\frac{6,32 \cdot 10^{10}\text{km}}{10000 \cdot 3,1 \cdot 10^{13}\text{km}} \Rightarrow \theta = 0,04''$ |

**<u>Subiectul II (15 puncte)</u>**

**II.1. Pe arhipelagul Toscan (8 puncte)**

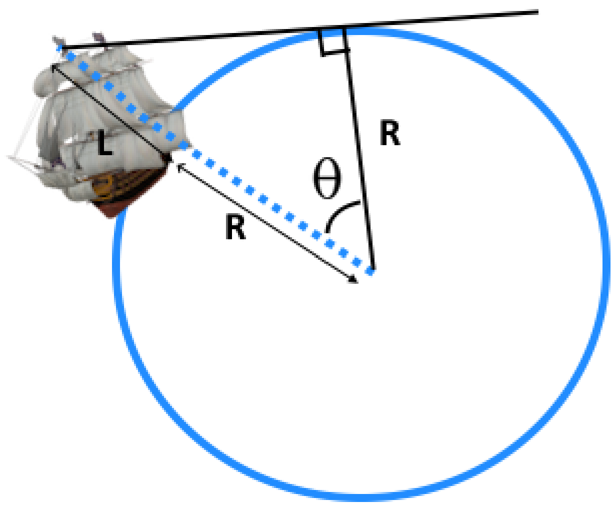
Una dintre cele mai cunoscute dovezi în favoarea sfericității Pământului este observarea unei nave care se îndepărtează de coastă: corpul navei dispare în timp ce catargul este încă vizibil, chiar dacă distanța ar fi de așa natură încât să vă permită să vedeți în continuare întreaga navă. Fenomenul este observat de către un locuitor al insulei Pianosa de pe arhipelagului Toscan, care privește o navă la orizont. Acesta estimează că după ce nava a dispărut, catargul a mai putut fi văzut aproximativ 45 de minute.

a. **(2 puncte)** De ce dispare doar corpul navei, iar catargul rămâne încă vizibil?

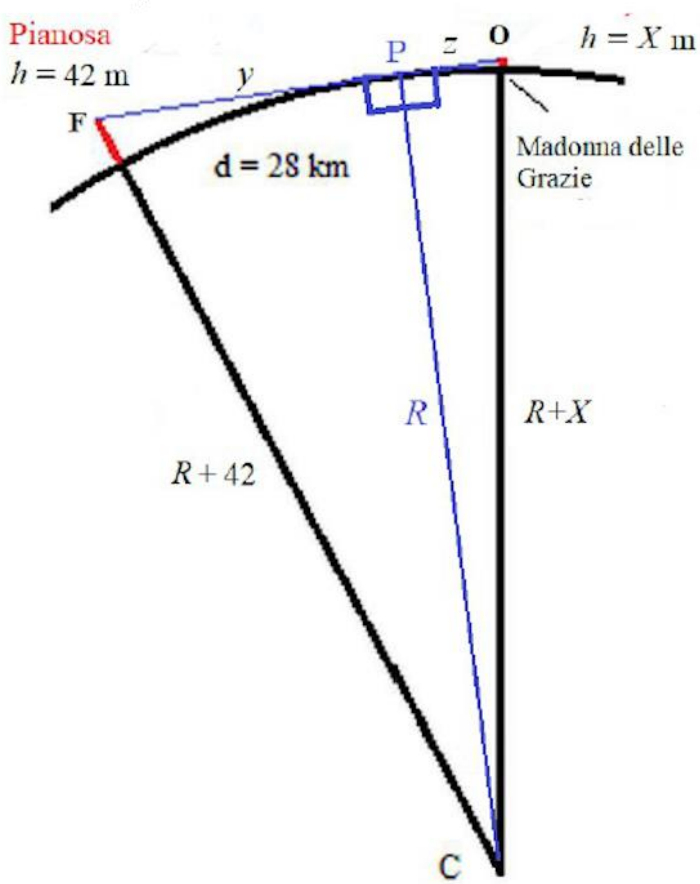
b. **(3 puncte)** Considerând lungimea catargului de L = 50 m și raza Pământului R = 6400 km, estimați viteza cu care nava se îndepărtează de insula Pianosa.


De pe insula Elba a arhipelagului Toscan se poate vedea lumina farului insulei Pianosa, la d = 28 km depărtare. Observatorii aflați pe malul plăjii Madonna delle Grazie au remarcat că doar persoanele mai înalte, cu înălțimea h > X = 1.8m, mai pot vedea lumina farului, care se află la h = 42 m altitudine față de nivelul mării.

c. **(3 puncte)** Estimați raza Pământului.

| **Rezolvare** | **Punctaj** |
|---|---|
| a. Motivul este curbura Pământului, care acoperă doar partea inferioară a navei. | 2 |
| b. Desen   | |
| $$sin\theta = \frac{\sqrt{(R+L)^2 - R^2}}{R+L}$$ | 0,5 |
| Se aplică aproximația Bernoulli $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pentru $x \ll 1$ $$sin\theta = \frac{R}{R+L}\sqrt{\left(1+\frac{L}{R}\right)^2 - 1} \approx \frac{R}{R+L}\sqrt{1+2\frac{L}{R} - 1} = \frac{R}{R+L}\sqrt{2\frac{L}{R}}$$ | 0,5 |
| Aproximația pentru unghiuri mici, $$sin\theta \approx \theta$$ | 0,5 |
| Presupunem constantă viteza cu care nava se îndepărtează de insula Pianosa, fiind tangențială cu raza Pământului, $$v = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$ | 0,5 |

| | |
|---|---|
| Distanța parcursă de navă în intervalul precizat de observator este $$R\Delta\theta = R\theta = R\frac{R}{R+L}\sqrt{2\frac{L}{R}} \approx \sqrt{2RL}$$ De unde obținem viteza $$v = \frac{\sqrt{2RL}}{\Delta t}$$ | 0,5 |
| Calcul numeric: $$v = \frac{\sqrt{2\cdot\ 6400km\cdot\ 0.05km}}{0.75h} = 33\ km/h$$ | 0,5 |
| **c. Soluția 1** | |

| | |
|---|---|
|  | |
| Se aplică teorema lui Pitagora pentru triunghiurile PCF și PCO,<br>$(R+h_z)^2 = R^2 + z^2$<br>$\left(R+h_y\right)^2 = R^2 + y^2$<br>unde $h_z = X = 1.8m$ și $h_y = 42m$, iar $x$ și $y$ sunt distanțele până la linia orizontului pentru cele două locații | 0,5 |
| $y + z \approx d = 28\ km$ | 0,5 |
| Calcul intermediar<br>$R^2 + h_z^2 + 2Rh_z = R^2 + z^2$<br>$R^2 + h_y^2 + 2Rh_y = R^2 + y^2$<br>$\Rightarrow h_z^2 + 2Rh_z - z^2 = h_y^2 + 2Rh_y - y^2$<br>$\Leftrightarrow y^2 - z^2 = h_y^2 - h_z^2 + 2R\left(h_y - h_z\right) = (2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)$<br>$y^2 - z^2 = (y-z)(y+z) \approx d(y-z)$<br>$\Rightarrow\ y - z = \frac{(2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)}{d}$ | 0,25 |
| $y = \frac{d + \frac{(2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)}{d}}{2} \approx \frac{d^2 + 2R(h_y - h_z)}{2d}$ | 0,25 |

| | |
|---|---|
| $$z = \frac{d - \frac{(2R + h_y + h_z)(h_y - h_z)}{d}}{2} \approx \frac{d^2 - 2R(h_y - h_z)}{2d}$$ | |
| $$(R + h_z)^2 = R^2 + z^2 \Rightarrow R^2 + h_z^2 + 2Rh_z = R^2 + \frac{\left(d^2 - 2R\left(h_y - h_z\right)\right)^2}{4d^2}$$ $$h_z^2 + 2Rh_z = \frac{d^4 + 4R^2\left(h_y - h_z\right)^2 - 4Rd^2\left(h_y - h_z\right)}{4d^2}$$ $$4d^2(h_z^2 + 2Rh_z) = d^4 + 4R^2\left(h_y - h_z\right)^2 - 4Rd^2\left(h_y - h_z\right)$$ $$R^2\left(h_y - h_z\right)^2 - Rd^2\left(h_y + h_z\right) + \frac{d^4}{4} - d^2h_z^2 = 0$$ $$R^2\left(h_y - h_z\right)^2 - Rd^2\left(h_y + h_z\right) + \frac{d^4}{4} \approx 0$$ | 0,25 |
| Se rezolvă ecuația de gradul II, $$R = \frac{d^2\left(h_y + h_z\right) \pm \sqrt{d^4\left(h_y + h_z\right)^2 - d^4\left(h_y - h_z\right)^2}}{2\left(h_y - h_z\right)^2}$$ $$R = \frac{d^2\left(h_y + h_z\right) \pm 2d^2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y - h_z\right)^2}$$ $$R = \frac{h_y + h_z \pm 2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y - h_z\right)^2}d^2$$ | 0,25 |
| Soluția validă este $$R = \frac{h_y + h_z - 2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y - h_z\right)^2}d^2,$$ deoarece pentru cealaltă soluție se obține $$z = \frac{d^2 - 2\frac{h_y + h_z + 2\sqrt{h_yh_z}}{2\left(h_y - h_z\right)^2}d^2\left(h_y - h_z\right)}{2d}$$ $$z = \frac{d}{2} - \frac{d}{2}\frac{h_y + h_z + 2\sqrt{h_yh_z}}{h_y - h_z} = -\frac{d\left(h_z + \sqrt{h_yh_z}\right)}{\left(h_y - h_z\right)} < 0$$ $z < 0 \Rightarrow$ soluție inacceptabilă fizic | 0,5 |
| Calcul numeric: $$R = 6400\ km$$ | 0,5 |
| **c. Soluția 2** | |

| | |
|---|---|
| | |
| În cazul în care lucrăm în aproximația unghiurilor mici (ca în subpunctul b), obținem $$y \approx \sqrt{2Rh_y}$$ $$z \approx \sqrt{2Rh_z}$$ | 1,5 |
| $$y + z \approx d = 28\ km$$ | 0,5 |
| Combinând relațiile anterioare se obține rapid $$R = \frac{d^2}{2(h_z + h_y + 2\sqrt{h_z h_y})} = \frac{h_y + h_z - 2\sqrt{h_y h_z}}{2(h_y - h_z)^2} d^2$$ | 0,5 |
| Calcul numeric: $$R = 6400\ km$$ | 0,5 |
| **Total** | **8** |

**II.2. Eclipse în sistem binar de stele (7 puncte)**

Se consideră un sistem binar de stele, dintre care una este albă iar cealaltă albastră. Steaua albă este cu $0{,}8^m$ mai strălucitoare decât steaua albastră, iar raza sa este de 2,8 ori mai mare. Determinati:

a) **(3,5 puncte)** Cu cât scade magnitudinea aparentă a sistemului in timpul eclipsei principale.

b) **(3,5 puncte)** Cu cât scade magnitudinea aparentă a sitemului in timpul eclipsei secundare.

Observație: Considerați că eclipsele sunt centrale.

| | |
|---|---|
| a) Fie $m_1$ magnitudinea stelei albe, $m_2$ magnitudinea stelei albastre iar m magnitudinea lor totală. Aplicând formula lui Pogson: $$m_2 - m = 2{,}5\lg\left(\frac{F_1 + F_2}{F_2}\right)$$ | 0,5 p |
| Întrucât stelele sunt la aceeasi distanță: $F \sim L$ | 0,5p |
| Prin urmare avem: $$m_2 - m = 2{,}5\lg\left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right) = 2{,}5\lg\left(\frac{L_1}{L_2} + 1\right)$$ | 0,5 p |
| $$\frac{L_1}{L_2} = 10^{0,4(m_1 - m_2)} \approx 2{,}09$$ | 0,5p |
| Atunci, magnitudinea totală este: | 0,5p |

| | |
|---|---|
| $m = m_2 - 2,5\lg 3,09 = m_2 - 1,22$ | |
| În cazul în care steaua albă eclipsează steaua albastră, doar steau albă este vizibila, prin urmare magnitudinea aparentă totală a sistemului este chiar magnitudinea stelei albe.<br>Așadar:<br>$\Delta m = m_1 - m = m_1 - m_2 + 1,22 = -0,8 + 1,22 = 0,42$ | 0,5p<br><br><br>0,5p |
| b) În cazul eclipsei secundare, steaua albastră trece prin fața stelei albe blocând astfel o parte din lumina ce vine de la steaua albă.<br>Fracțiunea de lumina care se va vedea de la steaua albă este:<br>$f = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 0,87$ | 0,5p<br><br><br>1p |
| Magnitudinea totală a ssistemului în acest caz este:<br>$m_2 - m' = 2,5\lg\left(\frac{0,87L_1 + L_2}{L_2}\right) = 2,5\lg\left(\frac{0,87L_1}{L_2} + 1\right)$<br>$m_2 - m' \approx 1,12$<br>$m' = m_2 - 1,12$ | 1p |
| Magnitudinea sistemului se va modifica cu:<br>$\Delta m' = m_2 - 1,12 - (m_2 - 1,22) = 0,1$ | 1 p |
| Total | 7p |

## Subiectul III (25 puncte)

### III.1. Soarele în viitorul îndepărtat (8 puncte)

Într-un viitor îndepărtat, Soarele se va transforma într-o gigantă roșie, atingând astfel dimensiunea maximă în decursul evoluției sale. Raza sa va fi de 256 ori mai mare decât în prezent iar luminozitatea va crește de 2730 ori, pe când masa se va micșora cu 33,2%. Se consideră că pierderea de masă a Soarelui în faza de gigantă roșie se produce lent iar orbitele planetelor sunt circulare. Se cunoaște luminozitatea Soarelui $L_0 = 3,846 \cdot 10^{26}\ W$ și constanta Stefan-Boltzmann $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ W/m^2K$.

a) **(3,5 puncte)** Care dintre planetele Sistemului Solar vor fi ”înghițite” de Soare?
b) **(2 puncte)** Determinați temperatura medie absolută la suprafața primei planete care nu va fi înghițită de Soare.
c) **(2,5 puncte)** Care dintre planete se vor afla în zona de habitabilitate? Se neglijează efectul de seră.

Puteți folosi datele din tabelul de mai jos.

| Planeta | Semiaxa mare (UA) | Albedoul |
|---|---|---|
| Mercur | 0,386 | 0,12 |
| Venus | 0,724 | 0,59 |
| Pământ | 1.00 | 0,31 |
| Marte | 1,52 | 0,15 |
| Jupiter | 5,20 | 0,44 |
| Saturn | 9,58 | 0,46 |

| | | |
|---|---|---|
| Uranus | 19,2 | 0,56 |
| Neptun | 30,1 | 0,51 |

**Rezolvare:**

| | |
|---|---|
| a) Întrucât masa Soarelui se modifică lent, orbitele planetelor rămân circulare.<br>Conform legii a 3-a lui Kepler:<br>$\frac{a_0^3}{T_0^2 M_0} = \frac{a^3}{T^2 M}$ | 1 p |
| Deasemenea momentul cinetic se conservă:<br>$a_0 v_0 = av$<br>$\frac{a_0^2}{T_0} = \frac{a^2}{T}$ | 1 p |
| Din legea a 3-a lui Kepler și din conservarea momentului cinetic obținem:<br>$M_0 a_0 = Ma$ | 0,25 p |

| | |
|---|---|
| Având în vedere că noua masă a Soarelui este $M = 0,688 M_0$, razele orbitelor tuturor planetelor (în afară de cele care cor fi înghițite de Soare) se vor mări cu un factor de $1,497$. | 0,5 p |
| Noua rază a Soarelui este de $1,20\ UA$, prin urmare Soarele va înghiți planetele aflate la o distanță de mai puțin de $1,20/1,497 = 0,80\ UA$. | 0,5 p |
| Planetele care vor fi înghițite de Soare sunt Mercur și Venus. | 0,25 p |
| b) Considerând planetele în echilibru termic, avem:<br>$F_i = F_r$<br>$F_i = (1-A) F_S$ | 0,5 p |
| $\frac{L(1-A)\pi r^2}{4\pi a^2} = 4\pi\sigma r^2 T_p^4$ | 0,5 p |
| $T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{M_0 a_0}}\sqrt[4]{\frac{L(1-A)}{\pi\sigma}}$ | 0,5 p |
| Prima planetă de la Soare va fi Pământul, petru care obținem temperatura la echilibru termic $T = 1470\ K$ | 0,5 p |
| c) Distanța față de Soare a zonei de habitabilitate poate fi exprimată astfel:<br>$a = \frac{1}{4T^2}\sqrt{\frac{L(1-A)}{\pi\sigma}}$ | |

| | |
|---|---|
| $$a_0 = \frac{1}{4T^2}\sqrt{\frac{L(1-A)}{\pi\sigma}\frac{M}{M_0}}$$ | 0,5 p |
| Având în vedere că zona de habitabilitate este definită ca regiunea în care temperatura permite existența apei în stare lichidă, putem exprima limitele zonei de habitabilitate în funcție de albedou:<br>Fie $T_1 = 273\,K$, respectiv $T_2 = 373\,K$.<br>$$a_1 = 29{,}30\sqrt{1-A}\ UA$$ $$a_{01} = 19{,}53\sqrt{1-A}\ UA$$ $$a_2 = 54{,}56\sqrt{1-A}\ UA$$ $$a_{02} = 36{,}45\sqrt{1-A}\ UA$$ | 0,5 p<br>0,5 p<br>0,5 p |
| Folosind datele din tabelul dat, ajungem la concluzia că planeta Uranus se va afla în zona de habitabilitate. | 0,5 p |
| **Total** | **8 p** |

**III.2. Unde se află steaua polară? (8 puncte)**

Încă din antichitate, oamenii aproximează Polul Nord Ceresc cu Polaris (steaua alpha din constelația Ursa Mică). Polaris se poate identifica pe cerul nopții, prelungind de 5 ori segmentul format de stelele Dubhe și Merak, reprezentând stelele alpha, respectiv, beta din Ursa Mare. Se consideră că Dubhe, Merak și punctul de interes format prin prelungire sunt pe un cerc mare.

a) **(2 puncte)** Se cunosc coordonatele ecuatoriale (J2024.5) ale stelelor implicate: $\alpha_P = 3^h0^m40^s, \delta_P = 89°22'0''$ (Polaris); $\alpha_D = 11^h5^m15^s, \delta_D = 61°37'29''$ (Dubhe); $\alpha_M = 11^h3^m19^s, \delta_M = 56°15'19''$ (Merak). Determinați coordonatele ecuatoriale $\alpha_Q, \delta_Q$ ale punctului teoretic $Q$ obținut prin tehnica prelungirii segmentului, descrisă mai sus.

b) **(2 puncte)** Calculați distanța unghiulară dintre $Q$ și Polaris, respectiv dintre $Q$ și Polul Nord Ceresc. Se justifică acuratețea metodei?

c) **(2 puncte)** Se știe că are loc fenomenul de precesie a echinocțiilor, cu o perioadă de 25.780 de ani. Oblicitatea Terrei este $\varepsilon = 23°26'$. Neglijăm în cele ce urmează mișcarea proprie a stelelor. În ce an apropiat lui 2024, Polul Nord Ceresc era/va fi la distanță unghiulară minimă de Polaris? Care este acea valoare minimă a distanței unghiulare?

d) **(2 puncte)** În ce an apropiat lui 2024, metoda prelungirii segmentului pentru a găsi empiric Polul Nord Ceresc era/va fi cea mai precisă? Cât de mare e eroarea? Comparați cu valorile de la b).

**Rezolvare:**

a) **(2 puncte)** Avem triunghiurile sferice din dreapta. Determinăm mai întâi distanța unghiulară dintre Merak și Dubhe, cu teorema cosinusului:

$$\cos\Delta = \sin\delta_D \sin\delta_M + \cos\delta_D \cos\delta_M \cos(\alpha_D - \alpha_M)\,;$$

Numeric: $\Delta = 5°22'31''$. Calculăm acum unghiul Merak-Dubhe-Polul Nord Ceresc, cu teorema cosinusului:

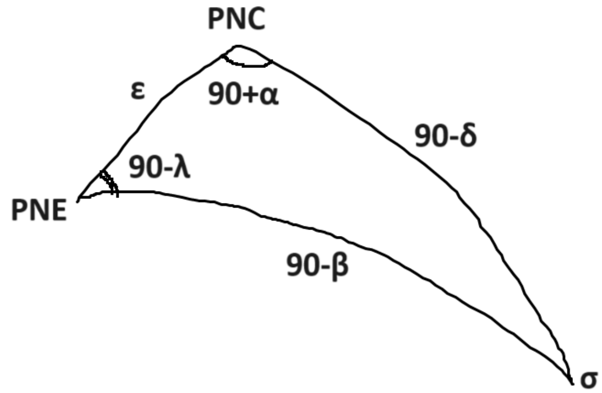
$$\sin\delta_M = \cos\Delta \sin\delta_D + \sin\Delta \cos\delta_D \cos\eta\,;$$

Numeric: $\eta = 177°6'42''$. Ne mutăm în al doilea triunghi, și putem calcula declinația lui $Q$:

$$\sin\delta_Q = \cos 5\Delta \sin\delta_D - \sin 5\Delta \cos\delta_D \cos\eta\,;$$

Numeric: $\boxed{\delta_Q = 87°59'25''}$. Pentru ascensie, mai aplicăm pentru latura $DQ$ teorema cosinusului:

$$\cos 5\Delta = \sin\delta_Q \sin\delta_D + \cos\delta_Q \cos\delta_D \cos(\alpha_Q - \alpha_D)\,;$$




Numeric: $\alpha_Q - \alpha_D = 2^h42^m3^s \Rightarrow \boxed{\alpha_Q = 13^h47^m18^s}$.

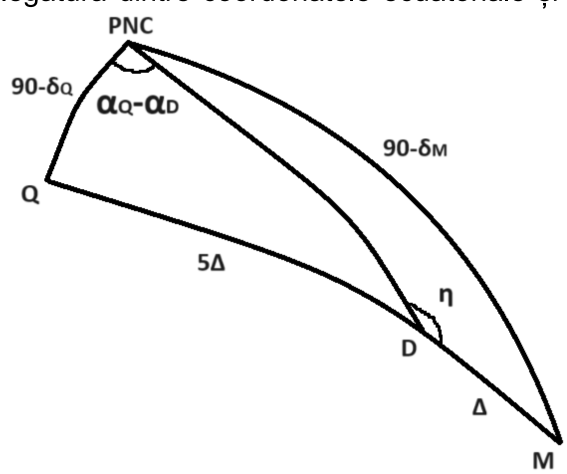
b) **(2 puncte)** Distanța unghiulară dintre $Q$ și Polul Nord Ceresc este $90° - \delta_Q = \boxed{2°0'35''}$. Apoi, distanța unghiulară dintre $Q$ și $P$ se calculează tot cu teorema cosinusului:

$$\cos\Delta_{PQ} = \sin\delta_P \sin\delta_Q + \cos\delta_P \cos\delta_Q \cos(\alpha_Q - \alpha_P) \Rightarrow \boxed{\Delta_{PQ} = 1°34'57''}.$$

Deci punctul $Q$ se află la aproximativ două grade de Polaris, respectiv, de Polul Nord Ceresc, ceea ce pentru măsurători cu mâinile și ochiul liber (găsirea punctelor cardinale, a meridianului locului etc.), este o metodă suficient de precisă.

c) **(2 puncte)** Cu alte cuvinte, se cere momentul de declinație maximă a stelei Polaris. Fenomenul de precesie are următorul efect asupra coordonatelor ecliptice: latitudinea ecliptică rămâne neschimbată, în timp ce longitudinea ecliptică variază crescător liniar, așa încât pentru o variație de 360 de grade, este nevoie de 25780 de ani, deci viteza unghiulară de precesie este $\Omega = 360/25780 = 50{,}27''/an$. (i.e. sfera cerească suferă o rotație în jurul Polului Nord Ecliptic, cu această viteză)

Avem nevoie de triunghiul sferic ce realizează legătura dintre coordonatele ecuatoriale și cele ecliptice, cel din dreapta.




Calculăm coordonatele ecliptice ale stelei Polaris, astfel:

$$\sin\beta_P = \cos\varepsilon \sin\delta_P - \sin\varepsilon \cos\delta_P \sin\alpha_P \Rightarrow \beta_P = 66°6'49'';$$

$$\sin\delta_P = \cos\varepsilon \sin\beta_P + \sin\varepsilon \cos\beta_P \sin\lambda_P \Rightarrow \sin\lambda_P = 0{,}9998;$$

$$\frac{\cos\lambda_P}{\cos\delta_P} = \frac{\cos\alpha_P}{\cos\beta_P} \Rightarrow \cos\lambda_P = 0{,}0192 \Rightarrow \lambda_P = 88°53'50''.$$

Vrem să vedem acum cum variază în timp declinația. Pornim o discuție generală mai întâi. Aplicăm teorema cosinusului pentru latura ce corespunde complementului declinației, unde $t$ este diferența dintre momentul de timp considerat și momentul actual de timp:

$$\sin\delta = \cos\varepsilon \sin\beta + \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda\,; \delta = \delta(t), \lambda = \lambda(t) = \lambda_0 + \Omega t; -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}; \sin\varepsilon \cos\beta \geq 0;$$

$$\sin\lambda(t) \in [-1,1] \Rightarrow \sin\delta(t) \in [\sin(\beta - \varepsilon)\,, \sin(\beta + \varepsilon)] \Rightarrow \delta \in [\arcsin\sin(\beta - \varepsilon)\,, \arcsin\sin(\beta + \varepsilon)].$$

Astfel, am găsit că: $\delta_{max} = \arcsin\sin(\beta+\varepsilon) = \begin{cases}\beta+\varepsilon, & \beta \le 90° - \varepsilon \\ 180° - \beta - \varepsilon, & \beta > 90° - \varepsilon\end{cases}$, asta se petrece pentru: $\sin\lambda(t) = 1 \Leftrightarrow \lambda(t) = 90°$, deci: $t = (90° - \lambda_0)/\Omega$. Numeric:

$$\delta_{max,P} = \beta_P + \varepsilon = 89°32'49''; \; t_P = \frac{90° - \lambda_P}{\Omega} = \frac{90° - 88°53'50''}{50{,}27''/an} \Rightarrow t_P \cong 78{,}97\ ani.$$

Prin urmare, în anul $\boxed{2103}$, Polaris va fi cel mai aproape de Polul Nord Ceresc, la o distanță unghiulară de $90° - \delta_{max,P} = \boxed{27'11''}$.

d) **(2 puncte)** Cu alte cuvinte, se cere momentul de declinație maximă a punctului fictiv $Q$. Calculăm coordonatele ecliptice ale lui $Q$ astfel:

$$\sin\beta_Q = \cos\varepsilon\sin\delta_Q - \sin\varepsilon\cos\delta_Q\sin\alpha_Q \Rightarrow \beta_Q = 67°24'23'';$$
$$\sin\delta_Q = \cos\varepsilon\sin\beta_Q + \sin\varepsilon\cos\beta_Q\sin\lambda_Q \Rightarrow \sin\lambda_Q = 0{,}9966;$$
$$\frac{\cos\lambda_Q}{\cos\delta_Q} = \frac{\cos\alpha_Q}{\cos\beta_Q} \Rightarrow \cos\lambda_Q = -0{,}0814 \Rightarrow \lambda_Q = 94°40'20''.$$

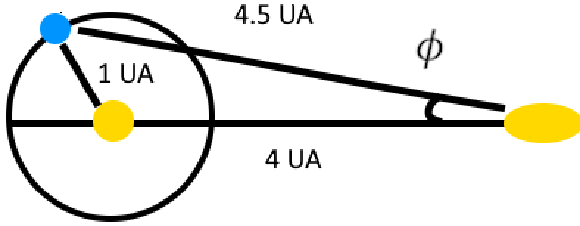
Similar cu punctul c), se va obține numeric:

$$\delta_{max,Q} = 180° - \beta_Q - \varepsilon = 89°9'37''; \; t_Q = \frac{90° - \lambda_Q}{\Omega} = \frac{90° - 94°40'20''}{50{,}27''/an} \Rightarrow t_Q \cong -334{,}59\ ani.$$

Prin urmare, în anul $\boxed{1689}$, $Q$ a fost cel mai aproape de Polul Nord Ceresc, la o distanță unghiulară de $90° - \delta_{max,Q} = \boxed{50'23''}$. De-a dreptul impresionant, avem o eroare de maxim un grad! Într-adevăr, ne aflăm într-o perioadă/epocă în care putem aproxima Polul Nord Ceresc fie cu Polaris, fie cu tehnica prelungirii segmentului. Dar în alte epoci, peste mii de ani, va fi nevoie de altceva, poate alte stele să folosim...

| **Rezolvare** | **Punctaj** |
|---|---|
| a. Presupunând neglijabilă variația distanței heliocentrice, vom avea decelerare uniformă: $$v = v_0 + a_{rad,m}t = v_0 - \beta\frac{KM_\odot}{r^2}t$$ ***Observație***. *Atunci când cometa care se apropie de Soare s-a aflat la distanța heliocentrică $r$, particulele de la extremitatea coamei au fost încetinite cu accelerația maximă $a_{rad,m} = -\beta\frac{KM_\odot}{r^2}$. La momentul ejecției particulelor, cometa se afla mai departe de Soare fiind decelerate cu o accelerație $a_{rad} < a_{rad,m}$.* | 1 |
| La extremitatea coamei avem condiția $$v = 0$$ | 0,5 |

| | |
|---|---|
| de unde obținem $$t = \frac{r^2 v_0}{\beta K M_\odot}$$ | 0,5 |
| Fiind o decelerare uniformă, viteza medie este $$\bar{v} = \frac{v_0}{2}$$ | 0,5 |
| În final, lungimea coamei va fi $L = \bar{v}t$, adică $$L = \frac{r^2 v_0^2}{2\beta K M_\odot}$$ | 0,5 |
| b. Dacă ținem cont și de dependența vitezei de ejecție de distanța heliocentrică, obținem $$L = \frac{r^2 v_0^2}{2\beta K M_\odot} \sim r^2 v_0^2(r)$$ $$v_0(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow L \sim r^2 \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 \Rightarrow L \sim r$$ | 0,5 |
| Lungimea coamei este direct proporțională cu distanța heliocentrică, deci aceasta va fi **minimă la periheliu**. | 0,5 |
| c. Din legea Bobrovnikoff – Delsemme, determinăm viteza de ejecție a particulelor la 4 UA: $$v_0(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow v_0(4\ UA) = v_0(1\ UA)\sqrt{\frac{1\ UA}{4\ UA}} = 290\frac{m}{s}$$ | 1 |
| $$t = \frac{r^2 v_0}{\beta K M_\odot} = \frac{(1.5 \times 10^{11}\ m)^2 \times 290\frac{m}{s}}{1 \times 6.67 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2} \times 2 \times 10^{30} kg} = 13.6\text{ h}$$ | 1 |
| d. Lungimea coamei va fi $$L = \frac{vt}{2} (\approx 7000\ km)$$ | 0,5 |

<table>
<tr>
<td>



Lungimea aparentă a cometei depinde de unghiul de fază $\phi$.<br>
Determinăm acest unghi din ΔSPC (Soare – Pământ – cometă), aplicând teorema cosinului:

$$\cos\phi = \frac{\Delta^2 + r^2 - r_{PS}^2}{2r\Delta}$$

$$\cos\phi = \frac{4.5^2 + 4^2 - 1^2}{2 \times 4.5 \times 4} = 0.97916$$

$$\phi = 11.7^o$$
</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>
Lungimea aparentă va fi proiecția pe planul cerului, adică

$$L_{ap} = L\sin\phi$$
</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>
de unde

$$\theta = \frac{L\sin\phi}{\Delta} = \frac{vt\sin\phi}{2\Delta}$$
</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>
Numeric:

$$\theta = \frac{7000\ km \times \sin 11.7^o}{4.5 \times 1.5 \times 10^8\ km} \times 206265''/rad = 0.4''$$
</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>Total</td>
<td>9</td>
</tr>
</table>