

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
17.02.2018
BAREM
CLASA VIII

Subiectul I a. Arătați că $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$

b. Arătați că:

$$\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} \in (2018, 2019).$$

Soluție:

a. $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} \dots\dots\dots 2p$

$\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} \dots\dots\dots 2p$

b. $\frac{3}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} =$

$= \frac{3}{2} + \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2018 \cdot 2019}\right) = \dots\dots\dots 1p$

$= 2018 + \frac{2018}{2019} \dots\dots\dots 1p$

$2018 + \frac{2018}{2019} \in (2018, 2019) \dots\dots\dots 1p$

Subiectul II Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = AA'$.

a) Determinați poziția punctului $T \in BB'$ pentru care perimetrul triunghiului $A'TC'$ este minim.

b) Studiați dacă $(BAC') \perp (TA'C)$.

Soluție:

a. $P_{A'TC'} = A'T + TC' + A'C$

Deoarece $T \in BB'$ avem $A'T = C'T$ ($\Delta A'B'T \equiv \Delta C'B'T$) și au valoarea minimă dacă T coincide cu B' ...2p

b. $(BAC') \cap (B'A'C) = O_1O_2$, unde am notat cu O_1, O_2 centrele pătratelor $BCB'C'$ și $ACA'C'$1p

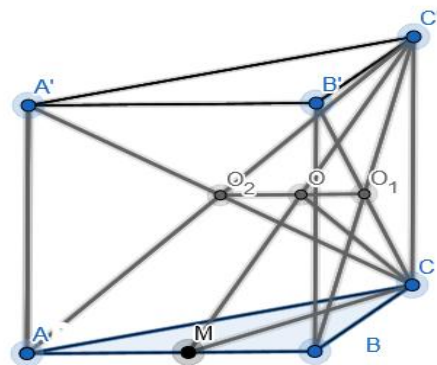
Fie M mijlocul laturii AB și O mijlocul segmentului O_1O_2 .

Deoarece $C'M \perp AB$ ($T3 \perp$) și $O_1O_2 \parallel AB$ avem $C'O \perp O_1O_2$, $C'O \subset (C'AB)$. Analog $CO \perp O_1O_2$, $CO \subset (CA'B')$.

Deci unghiul diedru căutat este $\sphericalangle C'OC$2p

Notăm $AB = l$. Atunci $C'M = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ și $C'O = \frac{l\sqrt{7}}{4}$. Analog $CO = \frac{l\sqrt{7}}{4}$1p

Verificarea reciprocei teoremei lui Pitagora în triunghiul $C'OC$: $C'O^2 + CO^2 = C'C^2$, conduce la $\frac{14l^2}{16} = l^2$, fals, deci planele nu sunt perpendiculare.....1p



Subiectul III Fie $ABCD A' B' C' D'$ cub și punctele M, N centrele fețelor $BCC' B'$ respectiv $A' B' C' D'$. Planul (AMN) intersectează muchia $B' C'$ în punctul P . a)

Să se determine valoarea raportului $\frac{B' P}{P C'}$. b) Să se arate că intersecția planului

(AMN) cu fețele cubului este un romb. *Soluție:* Fie $AN \cap CC' = \{Q\} \Rightarrow$

$(AMN) \cap (BCC' B') = MQ$ și $MQ \cap B' C' = \{P\}$ Notăm $PN \cap A' D' = \{R\}$ și

$PM \cap BC = \{S\}$ a) Construcția punctului P 1p

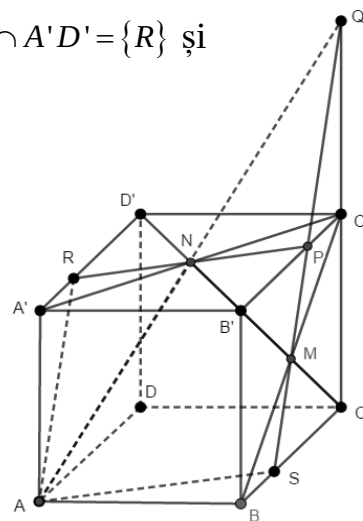
În triunghiul $\triangle QAC$ avem NC' linie mijlocie

prin urmare C' este mijlocul segmentului $[CQ]$ 1p

În triunghiul $\triangle QB' C$ $[B' C']$ și $[QM]$ sunt

mediane și P este centrul de greutate al

triunghiului prin urmare $\frac{B' P}{P C'} = 2$ 1p



b) Determinarea intersecției dintre planul (AMN) și suprafața cubului (respectiv patrulaterul $ASPR$).....1p

Justificarea faptului că $ASPR$ este paralelogram1p

$(C' P) \equiv (BS) \equiv (A' R)$ 1p

$(AS) \equiv (AR)$ și $ASPR$ romb 1p

Subiectul IV. Să se arate că numărul $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ este irațional pentru orice număr natural nenul n . *Soluție :* Presupunem că există n număr natural nenul astfel încât numărul $r = \sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ să fie rațional .

Deoarece $\sqrt{n+1} = r^2 - n \in \mathbb{Q}$ avem că numărul $n+1$ este pătrat perfect.....2p

$n+1 = k^2$ unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ 1p

$n + \sqrt{n+1} = k^2 + k - 1$ 1p

$k^2 + k - 1 > k^2$ 1p

$k^2 + k - 1 < k^2 + 2k + 1$ 1p

$k^2 + k - 1$ nu este pătrat perfect și $r = \sqrt{k^2 + k - 1} \notin \mathbb{Q}$ 1p

