



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 25 februarie 2018

Clasa a V- a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1.

a) $x = 3^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 49$ (2p)

$x = (3^n \cdot 5^n \cdot 7)^2$ (1p)

b) $889a + 89b + 9c + d = 2018$ (1p)

Pentru $a = 1$ nu avem soluție $89b + 9c + d = 1129$ și $89b + 9c + d \leq 891$ (1p)

Pentru $a = 2$, $89b + 9c + d = 240 \Rightarrow b = 2$, $c = 6$ și $d = 8$ (1p)

$abcd = 2268$ (1p)

2.

Din condiția i. avem că suma S căutată nu depășește anul 2006. (1p)

Din ii. avem că suma S a numerelor este mai mare decât 1000. (1p)

Suma a două numere prime este număr impar, atunci unul dintre termenii lui S este 2. (2p)

Din iii. avem că suma este un multiplu al numărului (335-28) sau (336-29), deci multiplu al lui 337, mai mare decât 1000 și mai mic decât 2006. Atunci S poate fi 1011, 1348 sau 1685 (1p)

Din iv. Avem că suma este de forma $S = 2^n - 13$. Corelăm cu iii. și deducem că $S + 13 = 1024 = 2^{10}$ care este o putere a celui mai mic termen. $S = 1011$ (1p)

$S = 2 + 1009$, care sunt numere prime. Deci produsul căutat este 2018. (1p)

3.

a) $n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2017} \Rightarrow 3n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2017} + 3^{2018} \Rightarrow$ (1p)

$3n + 1 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2017} + 3^{2018} \Rightarrow 3n + 1 = n + 3^{2018}$ (1p)

$2n + 1 = 3^{2018}$ (1p)

$\Rightarrow 2n = 3^{2018} - 1 < 3^{2018}$ (1p)

b) Din $2n + 1 = 3^{2018} \Rightarrow 3^{2018} = 1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2017} \Rightarrow$

$3^{2018} = 9 + (2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4) + (2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^7) + \dots + (2 \cdot 3^{2015} + 2 \cdot 3^{2016} + 2 \cdot 3^{2017}) =$

$= 9 + 2 \cdot 3^2(1 + 3 + 3^2) + 2 \cdot 3^5(1 + 3 + 3^2) + \dots + 2 \cdot 3^{2015}(1 + 3 + 3^2) =$ (1p)

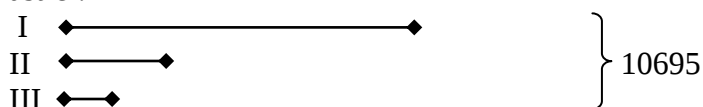
$= 9 + 2 \cdot 3^2 \cdot 13 + 2 \cdot 3^5 \cdot 13 + \dots + 2 \cdot 3^{2015} \cdot 13 = 9 + 2 \cdot 3^2 \cdot 13(1 + 3^3 + \dots + 3^{2013}) =$

$= 9 + 234 \cdot (1 + 3^3 + \dots + 3^{2015}) \Rightarrow$ (1p)

3^{2018} împărțit la 234 dă restul 9 (1p)

4.

Se folosește metoda figurativă. Punctajele sportivelor de pe locurile I, II și III le vom reprezenta astfel:



Dacă se adaugă 225 la punctajul Simonei ar fi de trei ori mai mare decât suma celorlalte, deci dacă

mai adăugăm 225 la suma tuturor punctajelor obținem de patru ori suma celorlalte. (2p)



Atunci Sorana și Irina au împreună $10920 : 4 = 2730$ puncte. (1p)

Simona are atunci $10695 - 2730 = 7965$ puncte. (1p)

Dar Simona are mai puțin cu 35 puncte decât de 200 de ori mai mult decât diferența dintre punctajele lor.



Atunci înseamnă că diferența punctajelor Soranei și Irinei este de $8000 : 200 = 40$. (1p)



Cum ele împreună au 2730 puncte, atunci Irina are $(2730 - 40) : 2 = 1345$ puncte (1p)

Sorana are $1345 + 40 = 1385$ puncte. (1p)

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Se acordă numai punctaje întregi.