



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 15 februarie 2018

Clasaa V-a

1. Fie numerele $A = 10 \cdot 3 + 10^2 + 10 \cdot 3^3 + \dots + 10 \cdot 3^{2018} + 100$ și $B = (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2018}) \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2018} + 10)$.
 - a) Demonstrați că $A + B$ este pătrat perfect.
 - b) Comparați numărul A cu 3^{2021} .
2. Arătați că numărul $M = 4^{n+1} \cdot 9^{n+2} - 6^{2n+1} \cdot 9 - 2^{2n} \cdot 9^{n+1}$ este divizibil cu 261, pentru orice n număr natural.
3. Arătați că dublul sumei numerelor naturale care împărțite la 2003 dau câtul și restul egale, se poate scrie ca produsul a trei numere naturale consecutive.
4. Aflați cifrele x, y și z , știind că $\overline{xy} \cdot (2x+y-z) = 75$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

MULT SUCCES!



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală- 15 februarie 2018

Clasaa VI-a

- 1) Se consideră mulțimea: $A = \left\{ \frac{a}{2018}; \frac{a+1}{2018}; \frac{a+2}{2018}; \dots, \frac{a+6054}{2018} \right\}$, unde $a \in \mathbb{N}$.
- a) Să se determine cea mai mică valoare a lui a pentru care media aritmetică a elementelor mulțimii A este număr natural.
- b) Să se afle a , știind că mulțimea A conține exact patru numere naturale.
- 2) Determinați numerele prime p pentru care $p^2 + 3^p + 1 = 37^a$, unde a este număr natural dat.
(G.M. 11/2017)
- 3) Fie segmentul $[AB]$ și punctele C, D, E pe acest segment astfel încât $4 \cdot BC = AB$, D este mijlocul segmentului $[AC]$ și $DE = \frac{AD}{3}$, $E \in (AD)$.
- a) Arătați că $[AE] \equiv [BC]$;
- b) Arătați că segmentele $[AB]$ și $[CE]$ au același mijloc.
- 4) Se consideră unghiul AOB având măsura egală cu 150° . În interiorul său se construiesc semidreptele $[OR_1, [OR_2, \dots, [OR_{29}$ și apoi semidreptele $[OV_1, [OV_2, \dots, [OV_{24}$. Semidreptele $[OR_1, [OR_2, \dots, [OR_{29}$ sunt colorate cu roșu și împart unghiul AOB în 30 de unghiuri congruente, iar semidreptele $[OV_1, [OV_2, \dots, [OV_{24}$ sunt colorate cu verde și împart unghiul AOB în 25 de unghiuri congruente. Aflați numărul semidreptelor verzi ce se suprapun peste semidreptele roșii, respectiv câte unghiuri cu măsura egală cu 1° apar în desen.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

MULT SUCCES!



Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală- 15 februarie 2018

Clasaa VI-a

- 1) Se consideră mulțimea: $A = \left\{ \frac{a}{2018}; \frac{a+1}{2018}; \frac{a+2}{2018}; \dots; \frac{a+6054}{2018} \right\}$, unde $a \in \mathbb{N}$.
- a) Să se determine cea mai mică valoare a lui a pentru care media aritmetică a elementelor mulțimii A este număr natural.
- b) Să se afle a , știind că mulțimea A conține exact patru numere naturale.
- 2) Determinați numerele prime p pentru care $p^2 + 3^p + 1 = 37^a$, unde a este număr natural dat.
(G.M. 11/2017)
- 3) Fie segmentul $[AB]$ și punctele C, D, E pe acest segment astfel încât $4 \cdot BC = AB$, D este mijlocul segmentului $[AC]$ și $DE = \frac{AD}{3}$, $E \in (AD)$.
- a) Arătați că $[AE] \equiv [BC]$;
- b) Arătați că segmentele $[AB]$ și $[CE]$ au același mijloc.
- 4) Se consideră unghiul AOB având măsura egală cu 150° . În interiorul său se construiesc semidreptele $[OR_1, [OR_2, \dots, [OR_{29}$ și apoi semidreptele $[OV_1, [OV_2, \dots, [OV_{24}$. Semidreptele $[OR_1, [OR_2, \dots, [OR_{29}$ sunt colorate cu roșu și împart unghiul AOB în 30 de unghiuri congruente, iar semidreptele $[OV_1, [OV_2, \dots, [OV_{24}$ sunt colorate cu verde și împart unghiul AOB în 25 de unghiuri congruente. Aflați numărul semidreptelor verzi ce se suprapun peste semidreptele roșii, respectiv câte unghiuri cu măsura egală cu 1° apar în desen.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

MULT SUCCES!



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 15 februarie 2018

Clasa a VII - a

1. Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât $ab + b + 2018 = ab^2$.
2. a) Pentru k număr natural, arătați că numerele naturale $k!$, $(k+1)!$ și $(k+2)!$ nu pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi, unde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.
b) Pentru ce valori ale lui n număr natural nenul, $a = \sqrt{1! + 2! + 3! + \dots + n!}$ este număr natural?
3. Fie triunghiul isoscel $\triangle ABC$, cu $AB=AC$ și $m(\angle BAC) > 120^\circ$. În interiorul unghiului $\angle BAC$ se consideră punctele M și N astfel încât $m(\angle BAN) = m(\angle MAC) = 120^\circ$ și $AM=AN=AB=AC$. Demonstrați că $BM + MN = BC$.
4. Considerăm trapezul $ABCD$, cu baza mare $[AB]$, ale cărui laturi neparalele se intersectează în T . Fie punctele $P \in (AD)$, $Q \in (BC)$.
a) Arătați că, dacă $\frac{TP}{PA} > \frac{TC}{CQ}$, atunci $\frac{TQ}{QB} > \frac{TD}{PD}$.
b) Arătați că, dacă $\frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} = \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD}$, atunci $PC \parallel AQ$ și $DQ \parallel BP$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

MULT SUCCES!



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15 februarie 2018**

Clasa a VIII-a

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + y^2 - 12x + 10y + 25 \leq 0$.
 - a) Demonstrați că $|2x - 3| \leq 3$ și $|y + 5| \leq 3$;
 - b) Demonstrați că $\sqrt{3x - 2y} \in [2; 5]$.
2. Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât 41 divide pe $4x + 5y$. Demonstrați că:
 - a) 41 divide pe $-5x + 4y$;
 - b) 41 divide pe $x^2 + y^2$.

Gazeta Matematică – nr.10/2017

3. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Arătați că:

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2d} + \frac{d}{d+2c} \geq \frac{4}{3}.$$

Gazeta Matematică – nr.9/2017

4. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu lungimea muchiei egală cu 1 cm, iar punctele M și N intersecția diagonalelor fețelor $ABB' A'$, respectiv $BCC' B'$.
 - a) Arătați că $MN \perp BD$ și calculați aria patrulaterului $ANC' D'$
 - b) Dacă planul (CMD) intersectează dreapta BC' în punctul P , iar Q este mijlocul lui $[BC]$, arătați că punctele P, Q și B' sunt coliniare.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

MULT SUCCES!