

# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

**PROBLEMA 1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale, următoarele ecuații:

a)  $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2;$

b)  $\{x\} + \frac{1}{\{x\}} = [x] + \frac{1}{[x]}.$

$\{x\}$  și  $[x]$  reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real  $x$ .

**Barem de corectare.**

a)  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow a = b = c$ ; prin urmare  $x = [x] = \{x\}$  și obținem  $x \in \mathbb{Z} \cap [0, 1) = \{0\}$  singura soluție..... (4p)

b) Condiții:  $\{x\} \neq 0$  și  $[x] \neq 0$  deci  $x \notin \mathbb{Z}$  și  $x \notin [0, 1]$ . .... (1p)

Se obține ecuația  $(\{x\} - [x])(\{x\}[x] - 1) = 0$ . .... (1p)

Avem  $\{x\} = [x]$  cu  $x = 0$  respectiv  $\{x\} = \frac{1}{[x]}$  cu  $[x] = k \in \mathbb{Z}$ . Din  $x = [x] + \{x\}$  și condiții obținem mulțimea soluțiilor  $\left\{x = k + \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}\right\}$  ..... (1p)

**PROBLEMA 2.** Arătați că oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$ , au loc următoarele inegalități:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

**Barem de corectare.**

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} - \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{1}{1+|x|+|y|} - \frac{1}{1+|x+y|} = \frac{|x+y|-|x|-|y|}{(1+|x|+|y|)(1+|x+y|)} \leq 0 \quad (4p)$$

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \quad \dots\dots\dots (3p)$$

**PROBLEMA 3.**

- a) Demonstrați că triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  au același centru de greutate, dacă și numai dacă  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$ .
- b) Pe laturile triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$  astfel încât  $\frac{BM}{BC} = m, \frac{CN}{CA} = n, \frac{AP}{AB} = p$ . Se notează cu  $G$  și  $G'$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC$ , respectiv  $MNP$ . Arătați că:
- Punctul  $G'$  se află pe mediana din  $A$  a triunghiului  $ABC$ , dacă și numai dacă  $n+p = 2m$ .
  - Punctele  $G$  și  $G'$  coincid, dacă și numai dacă  $m = n = p$ .

**Barem de corectare.**

- a) Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Avem  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{0}$ . ..... (1p)
- Reciproc, fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , deci  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$ . Obținem  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$ , de unde avem  $\overrightarrow{A'G} + \overrightarrow{B'G} + \overrightarrow{C'G} = \overrightarrow{0}$ , deci  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $A'B'C'$ . ..... (1p)
- b) i) Fie  $A'$  mijlocul segmentului  $[BC]$ . Avem  $G' \in AA' \Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} \text{ și } \overrightarrow{AA'} \text{ sunt coliniari. Din } \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG'} = \frac{1-m+p}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1-n+m}{3} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ și } 1-m+p = 1-n+m \text{ obținem } n+p = 2m. .... (3p)}$
- ii) Punctele  $G$  și  $G'$  coincid  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (p-m)\overrightarrow{AB} + (m-n)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow m = n = p. .... (2p)}$

**PROBLEMA 4.** Fie  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir cu  $x_0 = 0, x_1 = 1$  și  $2x_n + 3x_{n+2} \leq 5x_{n+1}, \forall n \geq 0$ . Arătați că pentru orice număr natural  $n$  are loc inegalitatea:

$$x_n \leq 3 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right].$$

**Barem de corectare.**

$3(x_{n+2} - x_{n+1}) \leq 2(x_{n+1} - x_n)$ ; adunăm inegalitățile scrise pentru  $n = 0, 1, \dots, n-2$  și obținem  $3x_n - 2x_{n-1} - 3x_1 + 2x_0 \leq 0$  și  $3x_n \leq 2x_{n-1} + 3. .... (4p)}$

Inegalitatea cerută se demonstrează prin inducție, observând că  $x_n \leq \frac{2}{3}x_{n-1} + 1. .... (3p)}$

<sup>1</sup>Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

<sup>2</sup>Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.