

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a IX-a

BAREM

1. Fie $a, b, c \geq 0$ și $a + b + c = 1$. Arătați că: $\frac{a^2}{a^3+5} + \frac{b^2}{b^3+5} + \frac{c^2}{c^3+5} \leq \frac{1}{4}$.		
1.	$a, b, c \geq 0$; $a + b + c = 1$, deci $a, b, c \leq 1$	(1p)
	$\frac{a^2}{a^3+5} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^3 + (1 - a^2) + (a - 2)^2 \geq 0$ relație adevărată pentru că toți termenii sunt pozitivi	(4p)
	$\frac{a^2}{a^3+5} \leq \frac{a}{4}$; Analog celelalte	(1p)
	Finalizare	(1p)
2. a) Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Calculați S_9 , știind că $S_3 = 40$ și $S_6 = 60$.		
(b) Calculați suma elementelor mulțimii $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{2x+3}{4} \right] = 1 + \{2x\} \right\}$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a .		
2.	(a)	(1p)
	$S_3 = 40, S_6 = 60, \frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$	
	Din $S_1 = \frac{x_1}{1-q} (1 - q^3) \Rightarrow S_9 = 80 \cdot \frac{7}{8} = 70$	(3p)
	(b) $\{2x\} = 0$; din $1 \leq \frac{2x+3}{4} < 2$ se ajunge la $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right) \Rightarrow B = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \right\}$	(2p)
	Suma cerută este 5	(1p)

3. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 3$ și punctele P, Q, G, R, S astfel încât: $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RG}$ și $\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{SC}$.		
a) Calculați lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.		
b) Arătați că există un număr rațional r pentru care punctele B, R, S sunt coliniare.		

	(a) Desen corect (prin identificarea poziției punctelor).....	(1p)
	M mijlocul lui (BC) și al lui $(PQ) \Rightarrow \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \vec{v} = \sqrt{3}$	(3p)
	(b) Teorema lui Menelaus pentru $\triangle ABC$ și secanta $B-R-S$ conduce la $\frac{AR}{AM} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{SC}{SA} = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{6}$ (sau soluție vectorială)	(3p)
4. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ și O intersecția diagonalelor sale, $a > 0$ și $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$, astfel încât: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$. a) Dacă $a = 1$, atunci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$. b) Dacă $a \neq 1$ și $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.		
	(a) în $\triangle OAB$ avem mediana $[OM] \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ în $\triangle OCD$ avem mediana $[OP] \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$ deci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$	(1p)
	analog $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$	(1p)
	Finalizare	(1p)
	(b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OC} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OB} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{a+1}\overrightarrow{OD} + \frac{a}{a+1}\overrightarrow{OA}$	(1p)
	$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$	(1p)
	$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$	(1p)
	Finalizare	(1p)

Barem – clasa a IX-a