

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 17 FEBRUARIE 2018

CLASA a XII –a Barem de notare

Problema 1. Fie $I_n = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^n \cdot \frac{1}{x} dx, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$2nI_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Selectată de prof. Fărcaș Nicolae și Ilonța Andrei din G.M. B nr.2/2016

Soluție:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' dx \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-1} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) (n-1) \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx && \mathbf{3p} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - (n-1) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{x} dx && \mathbf{2p} \end{aligned}$$

Deoarece

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2, \text{ rezultă } I_n = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

de unde

$$2nI_n = 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 8(n-1)I_{n-2} \quad \mathbf{2p}$$

Problema 2. Determinați funcțiile $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, cu derivata continuă, care admit o primitivă F , satisfăcând condițiile:

- (i) $F(0) = F(1) = 0$;
- (ii) $xf(x^2) = F(x)f'(x)$, pentru orice x din $[0,1]$.

GMB2012

Soluție:

Integrând pe $[0,1]$ se obține $\int_0^1 F(x) f'(x) dx = F(x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f^2(x) dx = - \int_0^1 f^2(x) dx \dots\dots 2p$

$$\int_0^1 x f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} (F(1) - F(0)) = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Scăzând relațiile și folosind (ii) se obține $\int_0^1 f^2(x) dx = 0 \dots\dots\dots 2p$

Finalizare, f este funcția identic nulă.....1p

Problema 3. Se consideră funcția $f: \left[0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1-2x}$ și operația definită prin

$$x * y = \frac{x + y - 4xy}{1 - 4xy}, \quad \forall x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

a) Arătați că operația „ $*$ ” este lege de compoziție internă.

b) Știind că legea este asociativă și $f(x * y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right),$

să se rezolve ecuația $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 3.$

Autor prof. Fărcaș Nicolae și Ilonța Andrei, C.N.S. Zalău

Soluție:

a) Din $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ avem

$$1 - 4xy > 0 \quad \text{și} \quad x + y - 4xy = x(1 - 2y) + y(1 - 2x) \geq 0, \quad \text{deci} \quad x * y \geq 0 \quad 1p$$

Inegalitatea $x * y < \frac{1}{2}$ este echivalentă cu

$$\frac{x + y - 4xy}{1 - 4xy} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + 2y - 4xy - 1 < 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(1 - 2y) < 0,$$

inegalitate adevărată **1p**

b) Prin inducție se arată că

$$f(x_1 * x_2 * \dots * x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), \quad n \geq 2 \quad 1p$$

Notând $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = a$, se obține $f(a) = nf(x) = \frac{nx}{1 - 2x} \quad 1p$

$$f(a) = \frac{a}{1 - 2a}, \quad \text{deci} \quad \frac{nx}{1 - 2x} = \frac{a}{1 - 2a}, \quad \text{de unde} \quad a = \frac{nx}{2nx - 2x + 1} \quad 1p$$

Ecuția devine $\frac{nx}{2nx-2x+1} = \frac{1}{n}$, de unde $x = \frac{1}{(n-1)^2+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $\forall n \geq 3$ **2p**

Problema 4. Fie $(G_1, \circ)$, $(G_2, \circ)$ două grupuri finite având m elemente, respectiv n elemente, cu $(m, n) = 1$. Arătați că există un singur morfism de grup $f: G_1 \rightarrow G_2$, pe care să îl precizați.

Soluție

Fie $f: G_1 \rightarrow G_2$ morfism de grupuri. Atunci $f(\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{de } m \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{\text{de } m \text{ ori}}$

... **1 p**

$\Rightarrow f(x^m) = f^m(x)$. Dar $x^m = e_1$, $f(e_1) = e_2$ și $(m, n) = 1$... **2 p**

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ma + nb = 1$, deci $f(x) = (f(x))^{ma+nb} = ((f(x))^m)^a \cdot ((f(x))^n)^b = e_2$

... **2 p**

$\Rightarrow f(x) = e_2$ este unicul morfism $f: G_1 \rightarrow G_2$ **2 p**