

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a X-a

1. Din inegalitatea mediilor obținem

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \sqrt[3]{(n-1)n(n+1)} < \frac{1+2+3+2+3+4+\dots+n-1+n+n+1}{3} = \dots (3p)$$

$$= \frac{1+2+3+\dots+n+1+2+3+\dots+n+3+4+\dots+n-1}{3} = \frac{(n+1)(n+2)+(n+2)(n-1)+(n+2)(n-3)}{6} = \dots (2p)$$

$$= \frac{n^2+n-2}{2} \dots (2p)$$

Alternativ: $\sqrt[3]{(k-1)k(k+1)} < \frac{k-1+k+k+1}{3} = k \dots (3p)$

$$\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \sqrt[3]{(n-1)n(n+1)} < 2+3+\dots+n = \frac{(2+n)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} \dots (4p)$$

2. $2^{2x-x^2} \leq 2, \forall x \in \mathbf{R}$, cu egalitate doar pentru $x=1$ (3p)

$$\frac{x^4+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2, \forall x \in \mathbf{R}^*, \text{ cu egalitate doar pentru } x=1 \text{ și } x=-1 \dots (3p)$$

$x=1$ soluție unică (1p)

3.a)

$$|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 + \dots + |z-z_n|^2 = (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1) + (z-z_2)(\bar{z}-\bar{z}_2) + \dots + (z-z_n)(\bar{z}-\bar{z}_n) = \dots (2p)$$

$$n|z|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 - z(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n) - \bar{z}(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \dots (1p)$$

$$n|z|^2 + n \dots (1p)$$

b) Din inegalitatea mediilor obținem

$$\frac{|z-z_1|+|z-z_2|+\dots+|z-z_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|z-z_1|^2+|z-z_2|^2+\dots+|z-z_n|^2}{n}} = \sqrt{\frac{n|z|^2+n}{n}} = \sqrt{|z|^2+1} \leq \sqrt{2} \dots (3p)$$

4. Fie $S_1 = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n$, $S_2 = \log_{x_1} a + \log_{x_2} a + \dots + \log_{x_n} a$

$$a^2 \leq x_i \leq a^3 \Rightarrow 2 \leq \log_a x_i \leq 3 \dots (2p)$$

Pentru un i fixat, fie $t = \log_a x_i$ și funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(t) = t^2 - 5t + 6$. $f(t) \leq 0, \forall t \in [2, 3]$.

$$t + \frac{6}{t} \leq 5 \Rightarrow \log_a x_i + 6 \log_{x_i} a \leq 5 \dots (2p)$$

Prin însumare se obține: $S_1 + 6S_2 \leq 5n$ (1p)

Aplicând inegalitatea mediilor se obține:

$$2\sqrt{S_1 \cdot 6S_2} \leq S_1 + 6S_2 \leq 5n \Rightarrow 24S_1S_2 \leq 25n^2 \Rightarrow S_1S_2 \leq \frac{25}{24}n^2 \dots (2p)$$