

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ****Barem – Clasa a VIII-a****SUBIECTUL I (7p)**

Determinați numerele reale pozitive a, b, c pentru care numărul

$$\frac{6}{\sqrt{a+12}-\sqrt{12a}+\sqrt{b+6}-\sqrt{20b}+\sqrt{c+10}-\sqrt{24c}}$$
 este natural.

*Gazeta Matematică***Soluție și barem orientativ:**

Numitorul nu trebuie să fie în mod obligatoriu număr natural, dar nu poate fi mai mare decât 6.

$$\sqrt{a+12}-\sqrt{12a}=\sqrt{a+3-2\sqrt{3a}+9}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{3})^2+9}\geq 3 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{b+6}-\sqrt{20b}=\sqrt{b+5-2\sqrt{5b}+1}=\sqrt{(\sqrt{b}-\sqrt{5})^2+1}\geq 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{c+10}-\sqrt{24c}=\sqrt{c+6-2\sqrt{6c}+4}=\sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{6})^2+4}\geq 2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{a+12}-\sqrt{12a}+\sqrt{b+6}-\sqrt{20b}+\sqrt{c+10}-\sqrt{24c}\geq 6 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{6}{\sqrt{a+12}-\sqrt{12a}+\sqrt{b+6}-\sqrt{20b}+\sqrt{c+10}-\sqrt{24c}}\leq 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Frația este număr natural pentru } a=3; b=5; c=6 \quad \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL II (7p)

a) Fie $x \in [1; +\infty)$. Demonstrați că $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0$;

b) Demonstrați că $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ pentru orice numere a și b pozitive și precizați când are loc egalitatea;

c) Fie $a, b \in [1; +\infty)$. Determinați minimul expresiei $ab \cdot (a + b - 10) + 8 \cdot (a + b)$.

Soluție și barem orientativ:

$$a) x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0 \text{ pentru orice } x \in [1; +\infty) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ evident adevărat} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Egalitatea are loc pentru } a=b \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \text{ Din inegalitatea mediilor avem } a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

$$ab(a+b-10)+8(a+b) \geq ab(2\sqrt{ab}-10)+8 \cdot 2\sqrt{ab} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cu notația } \sqrt{ab}=x \text{ se obține } ab(a+b-10)+8(a+b) \geq x^2(2x-10)+8 \cdot 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b-10)+8(a+b) \geq 2(x^3-5x^2+8x)$$

$$\text{Din inegalitatea de la punctul a) avem } x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 5x^2 + 8x) \geq 8 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Valoarea minimă a expresiei } ab(a+b-10)+8(a+b) \text{ este } 8 \text{ și se obține când } a=b=x \in \{1, 2\} \quad \dots\dots\dots 1p$$



SUBIECTUL III (7p)

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu lungimea muchiei de 6 cm, M mijlocul muchiei AB și E simetricul punctului A față de C .

Se notează cu N punctul de intersecție a dreptei BC cu planul (DME) .

a) Calculați lungimea segmentului EM .

b) Aflați perimetrul triunghiului DMN .

Soluție și barem orientativ:

a) Triunghiul ABE este dreptunghic, $BE = 6\sqrt{3}$ cm 1p

$EM = 3\sqrt{13}$ cm 1p

b) $[BC]$ și $[EM]$ sunt mediane în triunghiul ABE , $BC \cap EM = \{N\}$, deci N este centrul de greutate al triunghiului ABE 1p

$MN = \sqrt{13}$ cm 1p

$DM = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm 1p

$CN = 2$ cm, $DN = 2\sqrt{7}$ cm 1p

$P_{\triangle DMN} = \sqrt{13} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ cm 1p

SUBIECTUL IV (7p)

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu muchia $AB = a$ cm și punctul M mijlocul muchiei $D'C'$.

a) Demonstrați $AD \parallel (BCM)$;

b) Calculați distanța de la punctul D la planul (BCM) ;

c) Dacă distanța dintre dreptele AD și BM este egală cu $2\sqrt{5}$ cm, determinați valoarea lui a .

Soluție și barem orientativ:

a) $AD \parallel BC$, $BC \subset (BCM)$ și $AD \not\subset (BCM) \Rightarrow AD \parallel (BCM)$ 2p

b) Fie $DE \perp CM$, $E \in CM$. Demonstrarea faptului că $DE \perp (BCM)$ 1p

$CM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ cm și $DE = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ cm 2p

c) Deoarece $AD \parallel (BCM) \Rightarrow d(AD, BM) = d(AD, (BCM)) = d(D, (BCM)) = DE$ 1p

$a = 5$ 1p