

Barem de corectare OLM Clasa a X-a, 2014

$$1. a) 4|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - 2z_2|^2 + |-2z_1 + z_2|^2 = \\ = 4(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - 2z_2)(\bar{z}_1 - 2\bar{z}_2) + (-2z_1 + z_2)(-2\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \dots\dots\dots(2p)$$

$$= 9|z_1|^2 + 9|z_2|^2 \dots\dots\dots(2p)$$

$$b) \sum_{k=1}^n |S - tz_k|^2 = \sum_{k=1}^n (S - tz_k)(\bar{S} - t\bar{z}_k) \dots\dots\dots(1p)$$

$$\sum_{k=1}^n (S \cdot \bar{S} - tS\bar{z}_k - t\bar{S}z_k + t^2|z_k|^2) \dots\dots\dots(1p)$$

$$(n - 2t)|S|^2 + t^2 \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \dots\dots\dots(1p)$$

$$2. x = \sqrt[n]{a^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}}} = \dots\dots\dots(1p)$$

$$= a^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \cdot 2^n \cdot \frac{1}{4^n - 1}} = a^{\frac{2^n - 1}{2^{2n} - 1}} \dots\dots\dots(2p)$$

$$y = a^{\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right) \cdot \frac{n+1}{n}} \dots\dots\dots(1p)$$

$$= a^{\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}} = a \dots\dots\dots(2p)$$

$$x^{2^n + 1} = a^{\frac{2^{2n} - 1}{2^{2n} - 1}} = a = y \dots\dots\dots(1p)$$

3. Sistemul este ciclic. Presupunem că (x, y, z) este soluție a sistemului și $x > y$

$$x > y \Rightarrow 3y + 2 = 2^x + 3^x > 2^y + 3^y = 3z + 2 \Rightarrow y > z \dots\dots\dots(1p)$$

$$3z + 2 = 2^y + 3^y > 2^z + 3^z = 3x + 2 \Rightarrow z > x, \text{ contradicție } \dots\dots\dots(1p)$$

Analog pentru $x < y$, deci $x = y$, iar apoi $x = y = z \dots\dots\dots(1p)$

Avem că $2^x + 3^x = 3x + 2 \dots\dots\dots(1p)$

Dar $f: R \rightarrow R, f(x) = 2^x + 3^x$ este o funcție convexă și reprezentarea geometrică a graficului funcției $g: R \rightarrow R, g(x) = 3x + 2$ este o dreaptă. Folosind lectura grafică deducem că intersecția este posibilă în cel mult două puncte distincte $\dots\dots\dots(2p)$

$x = 0, x = 1$ verifică ecuația, deci $S = \{(0,0,0), (1,1,1)\} \dots\dots\dots(1p)$

4.a) Aplicăm inegalitatea mediilor

$$\log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{\log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{\log_{a_3} a_1} \geq 6\sqrt[6]{\log_{a_1} a_2 (\sqrt{\log_{a_2} a_3})^2 (\sqrt[3]{\log_{a_3} a_1})^3} = \dots\dots\dots(2p)$$

$$6\sqrt[6]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_1} \dots\dots\dots(2p)$$

b) Din inegalitatea mediilor obținem

$$\log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{\log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{\log_{a_3} a_4} \dots + n\sqrt[n]{\log_{a_n} a_1} \geq$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \sqrt[n]{\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \dots \log_{a_n} a_1} = \frac{n(n+1)}{2} \dots\dots\dots(3p)$$