

VIII

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, 25 februarie 2018

Clasa a VIII- a

VARIANTA 1

Barem orientativ de corectare și notare:

1.

a) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ 1p

finalizare $x < y < z$ 1p

b) $x < y < z$ și raționalizare $\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

scrierea inegalităților de la $n=1$ până la $n=2010$ 1p

însurarea relațiilor și obținerea inegalității

$$\sqrt{2011} - 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2010}} < \sqrt{2010}$$
2p

Înmulțirea cu 2 și finalizare $[\alpha] < 2\sqrt{2010} < 90$ 1p

2.

Demonstrăm/folosim următoarea inegalitate $(a, b) + [a, b] \geq a + b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Fie $d = (a, b) \neq 0 \Rightarrow a = d \cdot m, b = d \cdot n$ și $(m, n) = 1$.

Atunci avem de arătat că $(m, n) + [m, n] \geq m + n \Leftrightarrow 1 + m \cdot n \geq m + n \Leftrightarrow (m-1) \cdot (n-1) \geq 0$, adevărat deoarece cum $a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \geq 1$ și $n \geq 1$3p

Atunci avem $\{(a, b) + [a, b]\}^2 \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow \frac{\{(a, b) + [a, b]\}^2}{2} \geq \frac{(a + b)^2}{2}$ (1)1p

Dar $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow (a, b)^2 + [a, b]^2 \geq \frac{\{(a, b) + [a, b]\}^2}{2}$ (2)2p

Din (1) și (2) $\Rightarrow (a, b)^2 + [a, b]^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}$, scriind și analoagele, iar apoi prin adunare se obține inegalitatea din enunț.1p

3.

a) $BD \perp (MAC), MC \subset (MAC) \Rightarrow BD \perp MC$ 1p

$BP \perp (MNC), MC \subset (MAC) \Rightarrow BP \perp MC$ Finalizare1p

b) Localizarea lui O_1 , aplicarea teoremei bisectoarei în $\triangle AOB$ și determinarea $OO_1 = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$, unde

O este central lui ABCD, iar a latura cubului.....1p
 Justificarea $OO_1 = OO_2 = 1\text{cm}$. Finalizare1p
 c) $O_1E \parallel O_2F \parallel BD$. Folosirea, de la subpunctul a) a lui $BD \perp (MAC)$, $MO_2 \subset (MAC) \Rightarrow$
 $BD \perp MO_2 \Rightarrow MO_2 \perp O_1E$ 1p
 Justificarea $MO_2 \perp PO_1$1p
 $MO_2 \perp (PO_1E)$ Finalizare.1p

4.

a) Din teorema celor 3 perpendiculare avem $PE \perp DM$ (1p)

$\triangle DON$ dreptunghic isoscel ($AC \cap DM = \{N\}$).....(1p)

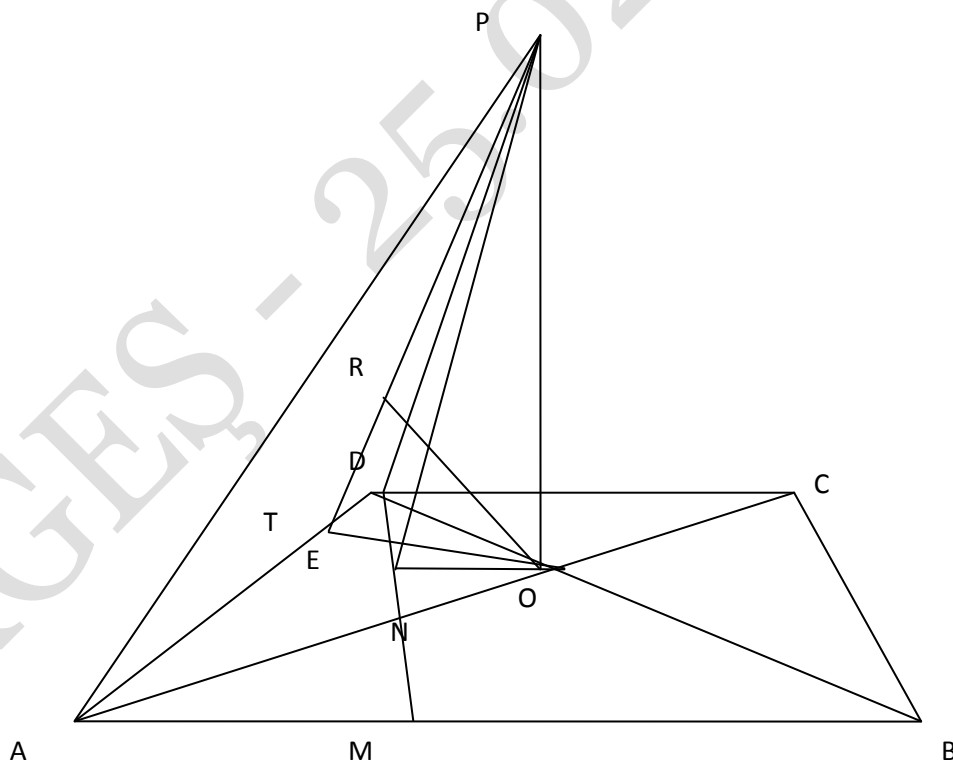
$DN = 6\text{cm}$, $OE = 3\text{cm}$ (1p)

$d(P, DM) = PE = 5\text{cm}$ (1p)

b) $OT \perp AD$, deci $PT \perp AD$; în plus, $OT \perp AD$, $OR \perp PT$ și din reciproca teoremei celor 3 perpendiculare avem $OR \perp (PAD)$, deci $d(O, (PDA)) = OR$(1p)

$AD = 2\sqrt{17}$, $OT = \frac{15}{\sqrt{17}}$ (1p)

$PT = \sqrt{\frac{497}{17}}$, $OR = \frac{60}{\sqrt{497}}$ (1p)



Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Se acordă numai punctaje întregi.