

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a IV – a

1. (3p) a) Aflați valoarea lui „ x ” din:

$$77 - (7 + x : 7) \times 7 = 7$$

- (4p) b) Să se afle un număr știind că dacă îl împărțim la 8, câtului obținut îi adunăm 13, suma obținută o înmulțim cu 4, iar din produsul obținut scădem 25, obținem 55.

2. (7p) Scrie numărul 613 ca o sumă de trei termeni, astfel încât fiecare termen să fie cu 1 mai mare decât dublul numărului precedent.

3. (7p) Dacă $\overline{abb} - \overline{xx} = 1$, arătați că numărul $\overline{abx} + \overline{axa} + \overline{xab}$ se împarte exact la 55, iar numărul $\overline{aaa} - \overline{aab} + \overline{aax}$ este număr par.

4. Un șoricel are 10 grame, iar șoricuța are 6 grame.

(2p) a) Câte grame au împreună 13 șoricea și 12 șoricuțe?

(5p) b) Dați cel puțin trei exemple în care un grup format din șoricea și șoricuțe să cântărească exact 200 de grame

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 2 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a IV – a

Subiectul 1. a) (3 puncte)

$$\begin{aligned}
 77 - (7 + x : 7) \times 7 &= 7 \\
 (7 + x : 7) \times 7 &= 77 - 7 \\
 (7 + x : 7) \times 7 &= 70 \dots\dots\dots 1p \\
 7 + x : 7 &= 70 : 7 \\
 7 + x : 7 &= 10 \\
 x : 7 &= 10 - 7 \\
 x : 7 &= 3 \dots\dots\dots 1p \\
 x &= 21 \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

Subiectul 1. b) (4 puncte)

$$\begin{aligned}
 (x : 8 + 13) \cdot 4 - 25 &= 55 \\
 (x : 8 + 13) \cdot 4 &= 55 + 25 \\
 (x : 8 + 13) \cdot 4 &= 80 \dots\dots\dots 1p \\
 x : 8 + 13 &= 80 : 4 \\
 x : 8 + 13 &= 20 \dots\dots\dots 1p \\
 x : 8 &= 20 - 13 \\
 x : 8 &= 7 \dots\dots\dots 1p \\
 x &= 7 \cdot 8 = 56 \\
 \text{R: } 56 &\dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

Subiectul 2. (7 puncte)

$$\begin{aligned}
 a + b + c &= 613 \dots\dots\dots 1p \\
 b &= 2a + 1 \dots\dots\dots 1p
 \end{aligned}$$

$$c = 2b + 1 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$a = 87 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$b = 175 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$c = 351 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 3. (7 puncte)

Din relația dată rezultă că cele două numere sunt consecutive, deci singura posibilitate este $100 - 99 = 1$, $\dots\dots\dots 1p$

ceea ce conduce la $a=1$, $b=0$ și $x=9$. $\dots\dots\dots 3p$

$$\overline{abx} + \overline{axa} + \overline{xab} = 1210 \text{ și } 1210 : 55 = 22 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\overline{aaa} - \overline{aab} + \overline{aax} = 120 \text{ și este număr par.} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4. a) (2 puncte)

$$13 \times 10 + 12 \times 6 = 202 \text{ grame} \quad \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 4. b) (5 puncte)

a = numărul de șorice

b = numărul de șoricuțe

$$10a + 6b = 200 \quad \dots\dots\dots 1p$$

împărțind la 2 obținem $5a + 3b = 100$ de unde avem b multiplul lui 5 $\dots\dots\dots 1p$
pentru fiecare exemplu câte 1 punct

OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a V – a

1. (5 p) a) Comparti numerele naturale a și b , știind că :

$$a = [(12^2 - 10^2) : 11 - 1^{2014}] : 3 - 2014^0$$
$$b = [(3^4 - 2^{16} : 2^{11}) : 7 - 2 \cdot 3]^{2014}.$$

- (2p) b) Cu numerele a și b determinate la cerința a) , efectuați :

$$\overline{bbaa} - \overline{baba} + a^b - b^a .$$

2. (4p) a) Aflați valoarea lui x din egalitatea :

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 50) = 2525$$

- (3p) b) Câte numere naturale verifică relația :

$$4 \cdot x + 17 < 100 ?$$

3. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2^n < x \leq 2^{n+1}, n \in \mathbf{N}\}$

- (4 p) a) Câte elemente are mulțimea A în cazul $n = 2014$.

- (3 p) b) Determinați numărul n pentru care mulțimea A are 128 elemente .

4. Se consideră numărul $N = \overline{ab60} + 25 \cdot \overline{ab}$.

- (2 p) a) Arătați că N este divizibil cu 5 .

- (2 p) b) Determinați restul împărțirii numărului N la 25 .

- (3 p) c) Dacă b este cifră pară , arătați că 2^N este pătrat perfect .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 2 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a V – a

1. a) $a = [(144 - 100) : 11 - 1] : 3 = 1 - 1 = 0$ (2 p)
 $b = [(81 - 32) : 7 - 6]^{2014} = 1$ (2 p)
 $a < b$ (1 p)
- b) $\overline{bbaa} - \overline{baba} + a^b - b^a = 1100 - 1010 + 0^1 - 1^0 = 90 - 1 = 89$ (2 p).
2. a) $50x + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 2525$ (2 p)
 $50x = 2525 - 50 \cdot 51 : 2$
 $50x = 2525 - 1275$ (1 p)
 $x = 1250 : 50 \Rightarrow x = 25$ (1 p)
- b) $4x < 100 - 17 \Rightarrow x < 20\frac{3}{4} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$ (2 p)
 21 numere naturale verifică relația (1 p)
3. a) $n = 2014$ $2^{2014} < x \leq 2^{2015}$ (1 p)
 $\Rightarrow A = \{2^{2014} + 1, 2^{2014} + 2, \dots, 2^{2015}\}$
 $\text{Card } A = (2^{2015} - 2^{2014}) = 2^{2014}$ (3 p)
- b) $\text{Card } A = (2^{n+1} - 2^n) = 2^n(2^1 - 1) = 2^n$ (2 p)
 Dacă $2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7$, deci $n = 7$ (1 p)
4. a) $N = \overline{ab} \cdot 100 + 60 + 25 \cdot \overline{ab} = 125\overline{ab} + 60 =$
 $5 \cdot (25\overline{ab} + 12) : 5$ (2 p)
- b) $N = 125\overline{ab} + 50 + 10 = 25(5\overline{ab} + 2) + 10$
 $10 < 25 \Rightarrow$ restul împărțirii lui N la 25 este 10 (2 p)
- c) b este cifră pară $\Rightarrow 5\overline{ab}$ este număr par $5\overline{ab} + 2$ este par $\Rightarrow N$ par $\Rightarrow$ există
 $k \in \mathbb{N}$ a.î. $N = 2k$ (2 p)
- $2^N = 2^{2k} = (2^k)^2$ - pătrat perfect (1 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. Calculați

(4 p) a) $(2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015}) : (2^{2014} - 2^{2011})$

(3 p) b) Media aritmetică a numerelor a și b , știind că

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}.$$

2. (3 p) a) Arătați că $a \cdot \overline{aaa} + b \cdot \overline{bbb} + c \cdot \overline{ccc}$ este divizibil cu 37.(4 p) b) Determinați $\overline{abc}$, știind că $a^2 + b^2 = c^2$ și a, b, c - distincte.3. Pe o dreaptă se consideră punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{10}$, în această ordine, astfel încât A_1 să fie mijlocul lui $[A_0A_2]$, A_2 mijlocul lui $[A_0A_3]$ și așa mai departe, până la A_9 mijlocul lui $[A_0A_{10}]$. Știind că $A_0A_1 = 2$ cm, determinați:(3 p) a) lungimea segmentului A_9A_{10} ;(4 p) b) lungimea laturii triunghiului echilateral care s-ar putea confecționa dintr-o buclă de sârmă cu lungimea egală cu $(A_0A_{10} - 1)$ cm.4. (7 p) Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ neadiacente suplementare, astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = \frac{3}{5}$ din $m(\sphericalangle AOB)$. Dacă D este simetricul punctului A față de O și E un punct astfel încât $(OB$ este bisectoarea $\sphericalangle EOC$, arătați că E se află pe dreapta AD .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 2 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. a) $[2^{2013} \cdot (1 + 2^1 + 2^2)] : [2^{2011} \cdot (2^3 - 1)] = (2^{2013} \cdot 7) : (2^{2011} \cdot 7)$ (3 p)
 Finalizare $(2^{2013} \cdot 7) : (2^{2011} \cdot 7) = 2^2 = 4$ (1 p)

b) $a + b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2014} + \frac{2013}{2014}\right) = 1 \cdot 2013 = 2013$
 $m_a = \frac{a+b}{2} = 2013 : 2 = 1006,5$ (3 p)

2. a) $a \cdot 111 \cdot a + b \cdot 111 \cdot b + c \cdot 111 \cdot c = 111 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 3 \cdot 37 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$
 rezultă că numărul este divizibil cu 37. (3 p)

b) $a^2 + b^2 = c^2$ și a, b, c cifre, $a \neq 0, a \neq b, a \neq c, b \neq c$.

Dacă $a = 1, b = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ numărul 101 - NU

Dacă $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow$ numărul 345 - DA

Dacă $a = 2 \Rightarrow 4 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 4$ (3 p)

Pătratele perfecte ale cifrelor de la 1 la 9 sunt $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ și nu există două pătrate perfecte a căror diferență să fie 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 sau 81

Singurele soluții sunt 345 și 435. (3 p)

3. a) $A_0A_1 = A_1A_2 = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_2 = 2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

$A_2A_3 = A_0A_2 = 4 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_3 = 2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} = 2^3 \text{ cm}$

$A_3A_4 = A_0A_3 = 8 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_4 = 2 \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm} = 2^4 \text{ cm} \Rightarrow A_4A_5 = 2^4 \text{ cm}$

$\Rightarrow \dots A_9A_{10} = 2^9 \text{ cm}$ (3 p)

b) $A_0A_{10} = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_9A_{10} = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 =$

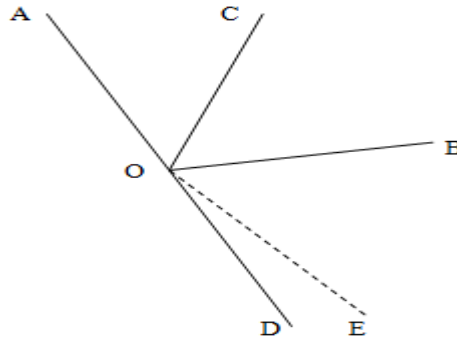
$2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = 2^3 + 2^3 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 = 2^{10}$ (2 p)

$A_0A_{10} - 1 = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023 : 3$ (1 p)

lungimea laturii triunghiului echilateral este $1023 : 3 = 341 \text{ cm}$ (1 p)

4. Desen

(1 p)



$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) + \frac{3}{5}m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{8}{5}m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 112^\circ 30'$$

$$m(\sphericalangle AOB) = 112^\circ 30' \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 67^\circ 30' \quad (2 \text{ p})$$

$$(OB \text{ bisectoarea } \sphericalangle EOC \Rightarrow m(\sphericalangle COB) = m(\sphericalangle BOE) = 67^\circ 30' \quad (1 \text{ p})$$

$$A \text{ și } D \text{ simetrice față de } O \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ - 112^\circ 30' = 67^\circ 30' \quad (2 \text{ p})$$

Dar $m(\sphericalangle BOE) = 67^\circ 30'$, deci $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle BOE)$ iar $(OD \text{ și } OE)$ sunt în același semiplan față de $(OB$ (1p)

**OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ****15.02.2014****Clasa a VII – a**

1. (3 p) a) Arătați că : $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pentru orice număr natural n .

(4 p) b) Stabiliți dacă numărul a este rațional , unde :

$$a = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{42}} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\sqrt{9900}} .$$

2. (7 p) Să se determine două numere naturale a căror sumă este 29 , știind că unul are 2 divizori , celălalt exact 5 divizori , iar suma tuturor divizorilor (celor 7) este 45 .

3. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $DB \perp BC$. Prin punctul C se duce o perpendiculară pe DC , care intersectează diagonala BD în E .

(4 p) a) Demonstrați că $\sphericalangle BEC \equiv \sphericalangle DAB$.

(3 p) b) Dacă $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, arătați că $\frac{BE}{EC} = \frac{CB}{BA}$.

4. (7 p) În pătratul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor $[AD]$ și $[DC]$. Fie $P \in (MB)$ astfel încât $MB = BP$. Dacă $BD = 8\text{ cm}$, aflați distanța de la B la NP

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ
15.02.2014
Clasa a VII – a

1. a) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3 p)

b) $a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{20}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}} + \dots + \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9900}} - \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{9900}}$

$$a = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} \quad (2 \text{ p})$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \in \mathbb{Q} \quad (2 \text{ p})$$

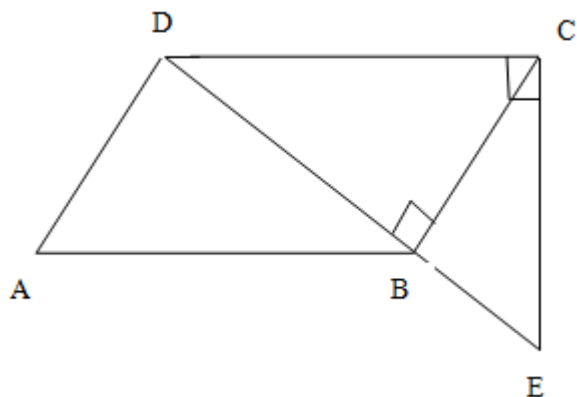
2. a) Fie a, b astfel încât $a + b = 29$. Cum a are 2 divizori, rezultă că $a = p$, unde p număr prim și $\mathcal{D}_a = \{1, p\}$ (2 p)

Numărul b are 5 divizori $\Rightarrow b = q^4$, unde q este număr prim iar $\mathcal{D}_b = \{1, q^1, q^2, q^3, q^4\}$ (2 p)

Suma divizorilor este $1 + p + 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 = 2 + (p + q^4) + q^1 + q^2 + q^3 = 2 + (a + b) + q^1 + q^2 + q^3 = 45 \Rightarrow q^1 + q^2 + q^3 = 45 - 31 = 14$. Rezultă $q(1 + q + q^2) = 14 \Rightarrow q \mid 14 \Rightarrow q \in \{2, 7\}$ (2 p)

Soluția este $q = 2$, deci $b = 2^4 = 16 \Rightarrow a = 29 - 16 = 13$ (1 p)

3.



(1 p)

(1 p)

a) $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow m(\angle ABC) + m(\angle BCD) = 180^\circ$.

Notăm $m(\sphericalangle ABD) = x$ și $m(\sphericalangle BCD) = y \Rightarrow x + 90^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ$. $m(\sphericalangle BCE) = 90^\circ - y = x^\circ$ (2 p)

În $\triangle BCE$, $(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle BEC) = y$ și cum $m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle BCD) \Rightarrow m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle DAB)$ (1 p)

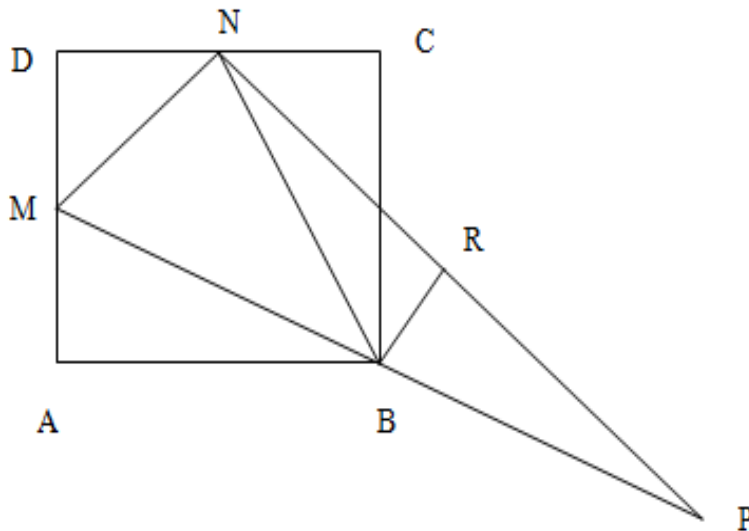
b) $m(\sphericalangle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ \Rightarrow \triangle BEC$ dreptunghic în B (1 p)

$$m(\sphericalangle BCE) = 30^\circ \Rightarrow BE = \frac{CE}{2} \Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}.$$

În $\triangle BCD$ $m(\sphericalangle B) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle BDC) = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{DC}{2} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2}$ (1 p)

$[DC] = [BA]$, rezultă $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{BA}$ (1 p)

4.



(1 p)

$$\triangle MAB \equiv \triangle NCB \Rightarrow \begin{cases} BM = BN \\ BN = BP \end{cases} \Rightarrow NB = \frac{MP}{2} \quad (2 \text{ p})$$

$\triangle MNP$ dreptunghic ($\hat{N} = 90^\circ$) $\Rightarrow MN \perp NP$, $BR \perp NP \Rightarrow MN \parallel BR$ (2 p)

B mijlocul lui MP , deci BR este linie mijlocie în $\triangle MNP \Rightarrow BR = \frac{MN}{2} = \frac{AC}{4} = 2 \text{ cm}$

(2 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VIII – a

1. (4 p) a) Calculați $\left[(2 + \sqrt{3})^{2014} + \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^{2014}} \right] \cdot \frac{(4 - 2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}}$
- (3 p) b) Determinați numerele raționale a și b astfel încât
- $$2a\sqrt{2} - b = a + b\sqrt{2} - 3 .$$
2. (4 p) a) Rezolvați ecuația $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2013| = 2014(x - 2014)$.
- (3 p) b) Arătați că $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \geq x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$
3. (7 p) În cubul $ABCD A' B' C' D'$, M este mijlocul laturii AB , $C' M \cap D' B = \{P\}$. Dacă $BP = 4\sqrt{3}$, aflați distanța de la punctul D la diagonala $D' B$.
4. În tetraedrul regulat $ABCD$ se consideră punctul M - mijlocul lui $[AB]$ și N - mijlocul lui $[AC]$. Dacă muchia tetraedrului este de 8 cm., determinați :
- (3 p) a) Perimetrul patrulaterului BCNM
- (2 p) b) măsura unghiului format de dreapta MN cu AB
- (2 p) c) distanța de la punctul C la planul (ABD) .

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 3 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALĂ**

15.02.2014

Clasa a VIII – a

$$1. \quad a) \quad \frac{(2+\sqrt{3})^{2014} \cdot (2-\sqrt{3})^{2014} + 1}{(2-\sqrt{3})^{2014}} \cdot \frac{(4-2\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}} = \frac{(2^2-\sqrt{3}^2)^{2014} + 1}{(2-\sqrt{3})^{2014}} \cdot \frac{2^{2014} (2-\sqrt{3})^{2014}}{2^{2013}} =$$

$$(1^{2014} + 1) \cdot 2 = 4 \quad (4 \text{ p})$$

$$b) \quad (2a - b)\sqrt{2} = a + b - 3$$

$$(2a - b)\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ iar } a + b - 3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad (3 \text{ p})$$

2. a) Membrul stâng este pozitiv $\Rightarrow$ membrul drept este pozitiv, deci $x - 2014 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2014 \Rightarrow x - 1 \geq 0, x - 2 \geq 0, \dots, x - 2013 \geq 0 \Rightarrow$
renunțând la module se obține

$$x - 1 + x - 2 + \dots + x - 2013 = 2014 \cdot (x - 2014) \Leftrightarrow 2013x -$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 2013) = 2014x - 2014^2 \Leftrightarrow 2013x - \frac{2013 \cdot 2014}{2} =$$

$$2014x - 2014^2 \Leftrightarrow x = 2014^2 - \frac{2013 \cdot 2014}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 2014^2 - 2013 \cdot 2014}{2} = 1007 \cdot$$

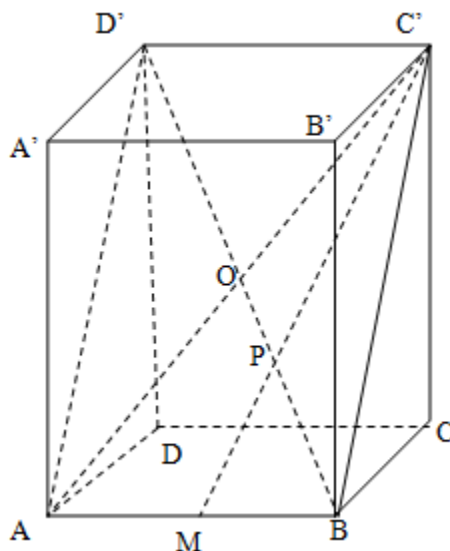
$$2015 \quad (4 \text{ p})$$

$$b) \quad x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x - y) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) =$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}_+ \quad (3 \text{ p})$$

3. Desen



(1 p)

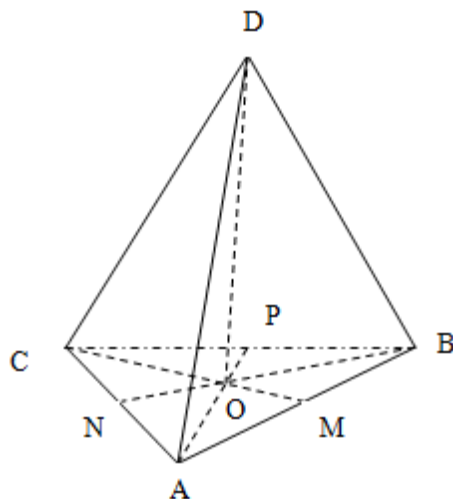
Unind C' cu $A \Rightarrow C'A$ diagonală în dreptunghiul $ABC'D'$, cu $AC' \cap BD' = \{O\}$.

În triunghiul ABC' , $C'M \cap BO = \{P\}$ (2 p)

P este centrul de greutate $\Rightarrow BP = \frac{2}{3}BO \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = BP \Rightarrow l = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow l = 12$ (muchia cubului) (2 p)

În triunghiul $D'DB$ cu $m(\angle D) = 90^\circ$ notăm $(D, BD') = DE$, $DE = \frac{DD' \cdot DB}{D'B} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$ (2 p)

4. Desen



(1 p)

a) $\triangle ABC$, MN – linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel BC$, $MN = \frac{BC}{2} = 4 \text{ cm}$
 $BCNM$ – trapez isoscel $P_{BCNM} = BC + CN + NM + MB = 8 \text{ cm} + 3 \cdot 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$ (2 p)

b) $MN \parallel BC$, AB secantă $m(\angle(MN, AB)) = 60^\circ$

Fie P mijl. lui $[BC] \Rightarrow AP \perp BC$

Cum $DO \perp (ABC) \Rightarrow DO \perp BC$, rezultă $\begin{cases} BC \perp (DPO) \\ AD \subset (DPO) \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD$.

Din $MN \parallel BC$ și $AD \perp MN \Rightarrow m(\angle(MN, AD)) = 90^\circ$

$$c) \begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp (CMD) \\ AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \perp (CDM)$$

Construim $CE \perp DM$, $CE \subset (CDM) \Rightarrow CE \perp (ADB) \Rightarrow d(C, (ABD)) = CE$

$$\text{În } \triangle CDM, DM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $DO = \frac{8\sqrt{6}}{3}$

$$A_{\triangle CDM} = \frac{CM \cdot DO}{2} = 16\sqrt{2}$$

$$A_{\triangle CDM} = \frac{DM \cdot CE}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot CE}{2} = 2\sqrt{3} \cdot CE. \text{ Se obține } CE = \frac{8\sqrt{6}}{3} d(C, (ABD)) = \frac{8\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$$

(2 p)