

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală 25.02.2017

CLASA a VII-a

Problema 1.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ și $A = \frac{a+b\sqrt{3}}{5+4\sqrt{3}}$.

a) Să se demonstreze că $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4a - 5b = 0$

b) Dacă $A \geq \sqrt{3} - 1$ și $a \leq 7 \Rightarrow a - b \leq 6$.

Problema 2.

Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{\sqrt{\frac{2017+x}{2017-x}} + \sqrt{\frac{2017-x}{2017+x}}}{\sqrt{\frac{2017+x}{2017-x}} - \sqrt{\frac{2017-x}{2017+x}}} \in \mathbb{Z}$.

Problema 3.

Se dă trapezul $ABCD$ în care $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $[AB] \equiv [AD]$ și punctul $E \in (AD)$ astfel încât $[AE] \equiv [DC]$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[BE]$. Dacă $[DM] \equiv [MN]$ aflați măsura unghiului $m(\angle ABE)$.

Problema 4.

Demonstrați că nu există triunghiuri isoscele care să aibă un unghi de 36° și lungimile laturilor exprimate prin numere naturale.

Notă:

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Punctajul minim de calificare la etapa județeană a olimpiadei de matematică este de 14 puncte.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEN BUZĂU
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală 25.02.2017

CLASA a VII-a - Soluții și barem orientativ

Problema 1.

Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ și $A = \frac{a+b\sqrt{3}}{5+4\sqrt{3}}$.

a) Să se demonstreze că $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4a - 5b = 0$

b) Dacă $A \geq \sqrt{3} - 1$ și $a \leq 7 \Rightarrow a - b \leq 6$.

Soluție:

a) Dacă $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5+4\sqrt{3} \mid a+b\sqrt{3}$

$$a+b\sqrt{3} = x(5+4\sqrt{3}), x \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-5x = \sqrt{3}(4x-b). \quad (1p)$$

Cum $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x-b=0$ și $a-5x=0 \Rightarrow a=5x$ și $b=4x$. (1p)

Deci $4a-5b=20x-20x=0$.

Dacă $4a-5b=0 \Rightarrow a=5k$ și $b=4k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \frac{k(5+4\sqrt{3})}{5+4\sqrt{3}} \Rightarrow A=k \in \mathbb{Z}$. (2p)

b) Din $A \geq \sqrt{3} - 1 \Rightarrow a+b\sqrt{3} \geq 7+\sqrt{3} \Rightarrow a-7+\sqrt{3}(b-1) \geq 0$. (1p)

Cum $a \leq 7 \Rightarrow a-7 \leq 0 \Rightarrow b-1 \geq 0 \Rightarrow -b \leq -1$. (1p)

Deci, $a-b \leq 7-1 \Rightarrow a-b \leq 6$. (1p)

Problema 2.

Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $\frac{\sqrt{\frac{2017+x}{2017-x}} + \sqrt{\frac{2017-x}{2017+x}}}{\sqrt{\frac{2017+x}{2017-x}} - \sqrt{\frac{2017-x}{2017+x}}} \in \mathbb{Z}$

Soluție:

Dacă $y = \sqrt{\frac{2017+x}{2017-x}}$, obținem $\frac{y+\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{y}} = \frac{y^2+1}{y^2-1} = \frac{\frac{2017+x}{2017-x}+1}{\frac{2017+x}{2017-x}-1} = \frac{2 \cdot 2017}{2x} = \frac{2017}{x} \in \mathbb{Z}$, 2017 număr

prim $x \in \{-2017; -1; 1; 2017\}$, $x \notin \{-2017; 2017\}$, $x \in \{-1; 1\}$

Barem

$\frac{y+\frac{1}{y}}{y-\frac{1}{y}} = \frac{y^2+1}{y^2-1} \dots\dots\dots$	2 p
---	-----

$\frac{2017+x}{2017-x} + 1 = \frac{2 \cdot 2017}{2x} = \frac{2017}{x} \in \mathbb{Z}$ $\frac{2017+x}{2017-x} - 1$	3 p
2017 număr prim, $x \in \{-2017; -1; 1; 2017\}$	1 p
Finalizare $x \in \{-1; 1\}$	1 p

Problema 3.

Se dă trapezul $ABCD$ în care $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, $[AB] \equiv [AD]$ și punctul $E \in (AD)$ astfel încât $[AE] \equiv [DC]$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[BE]$. Dacă $[DM] \equiv [MN]$ aflați măsura unghiului $m(\angle ABE)$.

Soluție:

$\triangle ABE \equiv \triangle DAC$ (C.C.) $\Rightarrow BE = AC$, $m(\angle ABE) = m(\angle DAC) = \alpha$. $[DM]$ sunt mediană corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic $ADC \Rightarrow DM = \frac{AC}{2} = MA = MC$. Analog pentru mediana

$[AN] \Rightarrow AN = \frac{EB}{2} = NE = NB$. Dar $EB = AC$ și atunci avem $MD = MA = NA = NB$. Cum

$MD = MN \Rightarrow MN = MA = NA \Rightarrow \triangle MAN$ echilateral $\Rightarrow m(\angle MAN) = 60^\circ$. Din $NA = NB \Rightarrow \triangle NAB$ isoscel cu baza $[AB] \Rightarrow m(\angle NAB) = m(\angle NBA) = \alpha$.

Dar $m(\angle DAC) + m(\angle MAN) + m(\angle NAB) = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$.

Barem

Figura	2 p
$\triangle ABE \equiv \triangle DAC$ (C.C.) $\Rightarrow BE = AC$, $m(\angle ABE) = m(\angle DAC) = \alpha$	1 p
$[AN]$ și $[DM]$ mediane corespunzătoare ipotenuzei în triunghiuri dreptunghice și obțin: $DM = \frac{AC}{2} = MA = MC$, $AN = \frac{EB}{2} = NE = NB$.	1 p
$MD = MA = NA = NB \Rightarrow \triangle NAB$ isoscel cu baza $[AB] \Rightarrow m(\angle NAB) = m(\angle NBA) = \alpha$	1 p
$MD = MN \Rightarrow MN = MA = NA \Rightarrow \triangle MAN$ echilateral $\Rightarrow m(\angle MAN) = 60^\circ$	1 p
$m(\angle DAC) + m(\angle MAN) + m(\angle NAB) = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$	1 p

Problema 4.

Demonstrați că nu există triunghiuri isoscele care să aibă un unghi de 36° și lungimile laturilor exprimate prin numere naturale.

Soluție:

Cazul 1

Se demonstrează că nu există triunghiuri isoscele cu laturile numere naturale și unghiul opus bazei de 36° .

Presupunem, prin absurd, că există un asemenea triunghi.

0,50 puncte

Considerăm triunghiul care are perimetrul minim și cu proprietățile cerute. Construim un triunghi cu perimetrul mai mic și proprietățile cerute, ceea ce va contrazice ipoteza făcută.

1 punct

Fie $\triangle ABC$ de perimetru minim. Ducem BB' bisectoarea $\sphericalangle B$ și $B'C' \parallel BC$.

$\triangle BB'C$ isoscel $\Rightarrow BB' \equiv BC = \text{natural}$

$\triangle AB'B$ isoscel $\Rightarrow AB' \equiv BB' = \text{natural} \Rightarrow B'C \equiv AC - AB' = \text{natural} = BC' \equiv B'C = \text{natural}$

1 punct

$\triangle BB'C$ isoscel $\Rightarrow B'C' = BC' = \text{natural} \Rightarrow \triangle AB'C'$ isoscel, $m(\sphericalangle A) = 36^\circ$, AB' , AC' , $B'C' \in \text{nr. naturale}$ și $P \triangle AB'C' < P \triangle ABC$

1 punct

Cazul 2

Vom demonstra că nu există triunghiuri isoscele cu laturile numere naturale și unghiurile de la bază de 36° .
Demonstrație prin reducere la absurd.

1,00 punct

Presupunem că există un asemenea triunghi. Luăm $D \in [BA]$ astfel încât $[AC] \equiv [DC]$

1,00 punct

$\Rightarrow \triangle CBD$ are laturile numere naturale, este isoscel și $m(\sphericalangle B) = 36^\circ$, în contradicție (cazul 1) $\Rightarrow$ nu există astfel de triunghiuri.

1,50 puncte