

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 01. 02. 2020

Clasa a XI –a

PROBLEMA 1.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^*)$, $n \in \mathbb{N}$ impar

Dacă $A \cdot A^t = I_n$, arătați că $\det(A^2 - I_n) = 0$, unde A^t este transpusa matricei A

PROBLEMA 2.

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ pentru $n \geq 1$. Să se calculeze:

$$a.) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad b.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PROBLEMA 3.

Determinați toate mulțimile $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ cu proprietățile:

- i.) $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nesingulare;
- ii.) $\forall X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow XY \in \mathcal{A}$.

PROBLEMA 4.

Fie $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții monotone. Să se arate că există $c \in (0,1)$ astfel încât:

$$f(c) + g(c) \neq \sin \frac{1}{c}$$

Notă:

¹ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

² Toate problemele sunt obligatorii;

³ Fiecare problemă se notează a de la 0 la 7;