

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a X-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. $a^x + b^x - c^x - \left(\frac{ab}{c}\right)^x \geq 0$**1 p**

$c^x \left[\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x - 1 - \left(\frac{a \cdot b}{c \cdot c}\right)^x \right] \geq 0$**1 p**

$\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x - 1\right) \left(1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^x - 1$ si $1 - \left(\frac{b}{c}\right)^x$ au același semn.....**3 p**

Cum $\frac{a}{c} > 1$ și $\frac{b}{c} < 1$ se consideră cazurile $x \geq 0$ si $x < 0$ si

problema este rezolvată..... **2p**

2. Ecuația se scrie $\log_5(3^x+2) + 2 = 5^{\log_3(5^x-2)}$**1p**

Notăm $\log_5(3^x + 2) = a$, $\log_3(5^x - 2) = b$ și obținem sistemul de ecuații

$3^x + 2 = 5^a, 3^b + 2 = 5^x, 3^a + 2 = 5^b$**2p**

Dacă $x > a \Rightarrow 3^x + 2 > 3^a + 2 \Rightarrow 5^a > 5^b \Rightarrow a > b \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^a + 2 > 3^b + 2 \Rightarrow 5^b > 5^x \Rightarrow b > x$ contradicție

Si analog dacă $x < a$**2p**

Se obține $x = a$ si analog $x = b$, de unde $3^x + 2 = 5^x$

Cu soluție unică $x = 1$ **2p**

3. Relația din ipoteză se scrie $:(a + b + c)(|a - b| + |b - c| + |c - a|) - (c \cdot |a - b| + a \cdot |b - c| + b \cdot |c - a|) = 0$**4p**

Impărțind prin $|a - b| + |b - c| + |c - a|$ se obține $Z_H - Z_I = 0$**1p**

Atunci $I = H \Rightarrow$ *triunghiul ABC este echilateral*.....**2p**

4. Notăm:

$\log_3 a = x, \log_3 b = y, \log_3 c = z \Rightarrow 3^{x^2+y} + 3^{y^2+z} + 3^{z^2+x} = \sqrt[4]{27}$**1p**

Cu inegalitatea mediilor $\sqrt[4]{27} \geq 3 \sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}}$**2p**

Obținem $\frac{3}{4} \geq \frac{3+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{3}$**1p**

De unde se obține $(2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2 \leq 0 \Rightarrow$

$$x = y = z = -\frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Finalizarea } a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots 1p$$

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.