



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a 12-a

Subiecte

Problema 1. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx, n \in \mathbb{N}$.

- Determinați numărul real I_2 .
- Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este monoton și determinați limita sa.

Problema 2. Se consideră funcțiile $f, g, h: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \int_0^{f(x)} \sin t \cos t dt$

$$\text{și } h(x) = \int_0^{\arctan x} \tan t dt.$$

- Determinați $g(1)$.
- Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)}$.

(Supliment GM 12/2023)

Problema 3. Se consideră un grup finit multiplicativ G și $a \in G$ un element fixat. Arătați că, dacă există o funcție surjectivă $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea că $f(x^3) = f(axa), \forall x \in G$, atunci grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

(Supliment GM 11/2023)

Problema 4. Pentru orice două grupuri G și H , având elementele neutre e_1 , respectiv e_2 , dacă $f: G \rightarrow H$ este un morfism de grupuri, se consideră mulțimile $\text{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_2\}$ și $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in G\}$.

Fie grupurile $G = (\mathbb{R}, +)$ și $H = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, precum și funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*, g(x) = \cos 2\pi x + i \cdot \sin 2\pi x$.

Demonstrați că:

- g este un morfism de grupuri;
- $\text{Ker}(g) = \mathbb{Z}$ și $\text{Im } g = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(Supliment GM 10/2023)