

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ**KÖRZETI SZAKASZ****2018. január 27.****XII. OSZTÁLY**

- 1.) Adott a $G = (0,1)$ halmazon értelmezett $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in G$ művelet úgy, hogy $(G, *)$ algebrai struktúra Abel-féle csoport.

a) Igazold, hogy az $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ függvény izomorfizmus a $(G, *)$ és $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ csoportok között!

b) Számítsd ki: $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{2018}$.

- 2.) Legyen G , az $x^6 = 1$ binom egyenlet komplex megoldásainak halmaza.

- a) Igazold, hogy $(G, \cdot)$ kommutatív csoport!
b) Igazold, hogy $(G \cap \mathbb{R}, \cdot)$ egy részcsoportja a $(G, \cdot)$ csoportnak!
c) Határozd meg, hány részcsoportja van a $(G, \cdot)$ csoportnak!

- 3.) Számítsd ki a következő integrálokat:

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}{\sin^3 x \cdot \cos x} dx \quad \text{și} \quad I_2 = \int \frac{\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx$$

- 4.) Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható függvényt, amely teljesíti az alábbi feltételeket:

$$\frac{f'(x)}{x^2 + 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \cdot f(x) + \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad f(0) = 1$$

Megjegyzés:**Minden feladat kötelező.****Minden feladat 10 pontot ér.****Munkaidő 3 óra.**