



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a X a

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

- a) Să se arate că funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, este strict crescătoare pe intervalul $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.
- b) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-2017} + \sqrt{y-2017} + \sqrt{2018-x} + \sqrt{2018-y} = 2\sqrt{2}$.

Problema 2.

- a) Să se rezolve ecuația: $(x+1)^{\log_2(x-3)} + 2 \cdot (x-3)^{\log_2(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$
- b) Să se arate că $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a + b + c, \forall a, b, c \in (1, \infty)$.

Problema 3. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

- a) Arătați că $z \in A$ dacă și numai dacă $\frac{2z-i}{2+iz} \in A$.
- b) Dacă $(1+z) \in A$ și $(1+z^2) \in A$, arătați că $z \in A$.

Problema 4.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, două câte două distincte, astfel încât $z_1 \cdot \overline{z_2} = z_2 \cdot \overline{z_3} = z_3 \cdot \overline{z_1}$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a X a

Barem

Problema 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

a) Să se arate că funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, este strict crescătoare pe intervalul $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Să se rezolve ecuația $\sqrt{x-2017} + \sqrt{y-2017} + \sqrt{2018-x} + \sqrt{2018-y} = 2\sqrt{2}$.

Soluție și barem: Fie $x_1, x_2 \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2-a} + \sqrt{b-x_2} - \sqrt{x_1-a} - \sqrt{b-x_1} = \\ &= \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-a} + \sqrt{x_1-a}} - \frac{x_2-x_1}{\sqrt{b-x_2} + \sqrt{b-x_1}} = (x_2-x_1) \left(\frac{1}{\sqrt{x_2-a} + \sqrt{x_1-a}} - \frac{1}{\sqrt{b-x_2} + \sqrt{b-x_1}} \right) \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Dar cum $x_1, x_2 \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, avem că $\sqrt{b-x_2} \geq \sqrt{x_2-a}$ și $\sqrt{b-x_1} \geq \sqrt{x_1-a} \dots\dots\dots 1p$

Întrucât $\sqrt{b-x_2} + \sqrt{b-x_1} > \sqrt{x_1-a} + \sqrt{x_2-a}$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \dots\dots\dots 1p$

Analog se arată că f este strict descrescătoare pe $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

b) Din condițiile de existență avem $x, y \in [2017, 2018]$. Fie $a = 2017, b = 2018$.

Din observațiile de la punctul a), deducem că $x = \frac{a+b}{2}$ este punct de maxim al funcției $f \dots\dots\dots 1p$

și cum $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{\frac{b-a}{2}} + \sqrt{\frac{b-a}{2}} = \sqrt{2(b-a)} = \sqrt{2}$, vom avea

$$f(x) \leq \sqrt{2}, f(y) \leq \sqrt{2}, \dots\dots\dots 1p$$



prin urmare

$$f(x) + f(y) = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2(b-a)} \Leftrightarrow x = y = \frac{a+b}{2} = \frac{2017+2018}{2} = \frac{4035}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2.

a) Să se rezolve ecuația: $(x+1)^{\log_2(x-3)} + 2 \cdot (x-3)^{\log_2(x+1)} = 3x^2 + 6x + 3$

b) Să se arate că $a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a + b + c, \forall a, b, c \in (1, \infty)$.

Soluție și barem:

a) Folosind formula $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, ecuația devine

$$(x+1)^{\log_2(x-3)} + 2 \cdot (x+1)^{\log_2(x-3)} = 3(x+1)^2 \dots\dots\dots 2p$$

Cum avem $x > 3 \Rightarrow \log_2(x-3) = 2 \Rightarrow x = 7 \dots\dots\dots 1p$

b) $2 \cdot (a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b}) = a^{\log_b c} + c^{\log_b a} + b^{\log_c a} + a^{\log_c b} + c^{\log_a b} + b^{\log_a c} = \dots\dots\dots 1p$

$$(a^{\log_b c} + a^{\log_c b}) + (b^{\log_c a} + b^{\log_a c}) + (c^{\log_a b} + c^{\log_b a}) \geq 2 \cdot \sqrt{a^{\log_b c + \log_c b}} + 2 \cdot \sqrt{b^{\log_c a + \log_a c}} + 2 \cdot \sqrt{c^{\log_a b + \log_b a}}, \dots\dots 2p$$

conform inegalității mediilor, și utilizând aceeași inegalitate avem

$$\log_b c + \log_c b \geq 2 \text{ și analoagele, deci } 2(a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b}) \geq 2(a + b + c)$$

iar prin împărțire cu 2 rezultă inegalitatea de demonstrat. 1p

Problema 3. Fie $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

a) Arătați că $z \in A$ dacă și numai dacă $\frac{2z-i}{2+iz} \in A$.

b) Dacă $(1+z) \in A$ și $(1+z^2) \in A$, arătați că $z \in A$.

Soluție și barem:

a) $\frac{2z-i}{2+iz} \in A \Leftrightarrow \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |2z-i| \leq |2+iz| \dots\dots\dots 1p$

Utilizând proprietatea $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, inegalitatea precedentă se rescrie

$$(2z-i)(2\bar{z}+i) \leq (2+iz)(2-i\bar{z}) \dots\dots\dots 1p$$



sau $4|z|^2 + 2iz - 2i\bar{z} + 1 \leq 4 - 2i\bar{z} + 2iz + |z|^2 \dots\dots\dots 1p$

ceea ce echivalează cu $|z| \leq 1$, deci $z \in A \Leftrightarrow \frac{2z-i}{2+iz} \in A \dots\dots\dots 1p$

b) Utilizând formula $(1+z)^2 = 1+2z+z^2$, rezultă că $2z = (1+z)^2 - (1+z^2) \dots\dots\dots 1p$

Astfel, folosind inegalitatea triunghiulară, obținem

$|2z| \leq |1+z|^2 + |1+z^2| \leq 2 \Rightarrow |z| \leq 1 \Rightarrow z \in A \dots\dots\dots 2p$

Problema 4.

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, două câte două distincte, astfel încât $z_1 \cdot \bar{z}_2 = z_2 \cdot \bar{z}_3 = z_3 \cdot \bar{z}_1$. Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție și barem:

Trecem la modul și obținem $|z_1| \cdot |z_2| = |z_2| \cdot |z_3| = |z_3| \cdot |z_1| \Rightarrow |z_1| = |z_2| = |z_3| \dots\dots\dots 2p$

Conjugăm acum relația din enunț și obținem $\bar{z}_1 \cdot z_2 = \bar{z}_2 \cdot z_3 = \bar{z}_3 \cdot z_1 \dots\dots\dots 1p$

$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 - z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_2 \cdot \bar{z}_1 + |z_2|^2 \dots\dots\dots 2p$

$|z_2 - z_3|^2 = (z_2 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = |z_2|^2 - z_2 \cdot \bar{z}_3 - z_3 \cdot \bar{z}_2 + |z_3|^2 \dots\dots\dots 1p$

Din considerațiile de mai sus rezultă că $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$ și analoagele,

deci triunghiul este echilateral.....1p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.

