

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
BAREM DE CORECTARE
CLASA A VII-A

SUBIECTUL 1

Se consideră șirul de numere reale

$$\sqrt{23}, \sqrt{56}, \sqrt{89}, \sqrt{1112}, \dots, \sqrt{20182019}, \dots$$

a) Al câtelea termen este $\sqrt{20182019}$? Scrieți al 2018 termen al șirului.

b) Demonstrați că orice termen al șirului este un număr irațional.

G.M. nr. 12/2018, Petre Simion, București

Soluție:

a) Observăm că numerele 23; 56; 89; ... ; 20182019 s-au format prin alăturarea cifrelor

numerelor n și $n+1$, cu $n \in \{2; 5; 8; \dots; 2018\}$1 punct

În șirul 2; 5; 8; ...; 2018: $\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 2 = 3 \cdot 0 + 2 \\ T_2 = 5 = 3 \cdot 1 + 2 \\ T_3 = 8 = 3 \cdot 2 + 2 \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow T_n = 3 \cdot (n-1) + 2$ 1 punct

Deoarece $2018 = 3 \cdot 672 + 2 \Rightarrow 2018 = T_{673}$.

Atunci, în șirul dat, $\sqrt{20182019}$ este al 673-lea termen.1 punct

$$T_{2018} = 3 \cdot (2018-1) + 2 = 6053.$$

Al 2018-lea termen din șirul dat va fi $\sqrt{60536054}$1 punct

b) Afirmă că orice număr natural de forma $3 \cdot k + 2$, cu $k \in \mathbb{N}$, nu este pătrat perfect.....1 punct

Toate numerele 23, 56, 89, ..., 20182019 sunt de forma $3 \cdot k + 2$, ceea ce înseamnă

că nu sunt pătrate perfecte. (1)

Dacă $a \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$, dacă și numai dacă a este pătrat perfect. (2)1 punct

Din relațiile (1) și (2), deducem că orice termen al șirului

$\sqrt{23}, \sqrt{56}, \sqrt{89}, \sqrt{1112}, \dots, \sqrt{20182019}, \dots$ este un număr irațional.1 punct

SUBIECTUL 2

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\sqrt{(2x-3)^2} + 4|3-2x| = 35;$

b) $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2} = 2019(x-2012)$

Prof. Marius Mazilu, Rm. Vâlcea

Soluție:

a) Folosește formula: $\sqrt{a^2} = |a|$ 1p

Din $|3-2x| = |2x-3|$ și înlocuind, ecuația devine: $5 \cdot |2x-3| = 35$ 1p

Rezolvă ecuația și găsește $x \in \{-2, 5\}$ 1p

b) Ecuația este echivalentă cu:

$$|x-3| + |x-2| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| = 2019(x-2012)$$

Din $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ obține $|x-3| + |x-2| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3| \geq 0$ 1p

$\Rightarrow 2019(x-2012) \geq 0$ de unde $x \geq 2012$ 1p

Obține: $|x-3| = x-3, |x-2| = x-2, |x| = x, |x+1| = x+1, |x+2| = x+2$ și $|x+3| = x+3$ 1p

Ecuația devine: $7x = 2019(x-2012)$ și obține $x = 2019$ 1p

SUBIECTUL 3

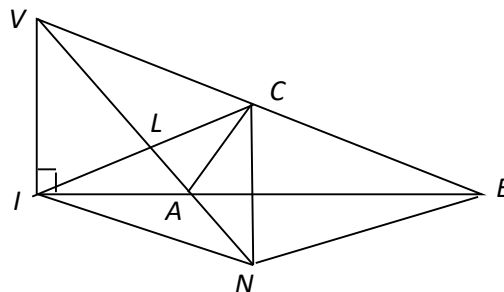
În triunghiul dreptunghic VIE punctul C este mijlocul ipotenuzei [VE]. Segmentul [VL] este mediană în triunghiul VIC, cu $L \in (IC)$, iar N este simetricul lui V față de L. Fie $VN \cap IE = \{A\}$. Să se arate că:

a) Patrulaterul CINE este romb;

b) $AV = 2 \cdot AC$.

Prof. Ștefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

Soluție:



a) $\left. \begin{array}{l} [VL] \text{ este mediană în } \triangle VIC \Rightarrow L \text{ este mijlocul segmentului } [IC] \\ N \text{ este simetricul lui } V \text{ față de } L \Rightarrow L \text{ este mijlocul segmentului } [VN] \end{array} \right\} \Rightarrow VINC \text{ este}$

paralelogram1punct

$\left. \begin{array}{l} IN \parallel CE \\ [IN] \equiv [CE] \end{array} \right\} \Rightarrow CINE \text{ este paralelogram (1) } \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$\left. \begin{array}{l} \triangle VIE \text{ este dr. în } I \\ [IC] \text{ este mediană} \end{array} \right\} \Rightarrow IC = \frac{VE}{2} = CE \quad (2) \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} VI \perp IE \\ CN \parallel VI \end{array} \right\} \Rightarrow CN \perp IE \quad (3) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Din relațiile (1) și (2) sau din (1) și (3) $\Rightarrow CINE$ este romb.1 punct

b) IE este mediatoarea segmentului $[CN] \Rightarrow d(A, N) = d(A, C) \Rightarrow AN = AC \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

Arată că din $[EA \text{ este bisectoare în } \triangle VEN] \Rightarrow \frac{AV}{AN} = \frac{EV}{EN}$

sau demonstrează că A este centrul de greutate al triunghiului CIN1 punct

Finalizează $AV = 2 \cdot AC$1 punct

SUBIECTUL 4

În triunghiul ascuțitunghic ABC, $AE \perp BC$, $E \in BC$ și $M \in BC$ astfel încât $C \in (BM)$.

Bisectoarea unghiului ACM intersectează dreapta AE în punctul D.

a) Arătați că $m(\angle ADC) \neq m(\angle ACB)$;

b) Știind că $m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = x^\circ$ și că $\triangle ABC$ este isoscel, aflați x .

Prof. Marius Mazilu, Rm. Vâlcea

Soluție:

Fie [CF bisectoarea unghiului ACM $\Rightarrow$

$$m(\angle ACF) = m(\angle FCM) = b^\circ \text{ și } m(\angle ACM) = 2b^\circ$$

a) $\angle FCM$ și $\angle DCE$ - unghiuri opuse la vârf $\Rightarrow m(\angle ECD) = b^\circ$.

Presupunem prin R.A. că $m(\angle ADC) = m(\angle ACB) = a^\circ$

În $\triangle DEC$, $m(\angle DEC) = 90^\circ \Rightarrow a^\circ + b^\circ = 90^\circ$

$$m(\angle ECM) = 180^\circ \Rightarrow a^\circ + 2b^\circ = 180^\circ \Rightarrow b = 90 \dots\dots\dots 1p$$

Obținem imediat că $m(\angle ACM) = 2b^\circ = 180^\circ$ contradicție cu $m(\angle exterior) < 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(\angle ADC) \neq m(\angle ACB) \dots\dots\dots 1p$$

b) Din $m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = x^\circ$ și $m(\angle ADC) \neq m(\angle ACB)$

$\Rightarrow AB \neq AC$

Deci $\triangle ABC$ este isoscel $\Leftrightarrow (AB = BC \text{ sau } BC = AC) \dots\dots\dots 1p$

$$m(\angle BCA) = 180^\circ - 2b^\circ \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

Cazul 1 $AB = BC$

$\Rightarrow m(\angle BCA) = m(\angle BAC)$ și cum $m(\angle ABC) = x^\circ \Rightarrow$

$$m(\angle BCA) = m(\angle BAC) = \frac{180^\circ - x^\circ}{2} \quad (2),$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow 4b^\circ = 180^\circ + x^\circ$

În $\triangle DEC$, dreptunghic în E, avem $b^\circ + x^\circ = 90^\circ$

Se află $x = 36 \dots\dots\dots 1p$

Cazul 2 $BC = AC$

$\Rightarrow m(\angle ABC) = m(\angle BAC) = x^\circ \Rightarrow m(\angle BCA) = 180^\circ - 2x^\circ \quad (3)$

Din (1) și (3) $\Rightarrow x = b$

Se află $x = 45 \Rightarrow m(\angle ACB) = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 45$ - nu convine deoarece $\triangle ABC$ este ascuțitunghic $\dots\dots\dots 1p$

