



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11.02.2023

Clasa a VI-a - BAREM

Problema 1

Fie A mulțimea cifrelor nenule, B mulțimea rapoartelor de forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in A$ și b divide a iar C mulțimea proporțiilor formate cu termeni diferiți din A .

- Să se arate că A și mulțimea valorilor rapoartelor din B sunt egale.
- Să se arate că numărul de elemente ale mulțimii C este multiplu de 4.
- Câte proporții din mulțimea C sunt formate numai cu rapoarte din mulțimea B ?

prof. Constantin Bozdog, Reghin

Barem:

a) Cum b divide a , valorile rapoartelor din B vor fi cifre nenule, deci mulțimea valorilor rapoartelor din B este inclusă în A 1p

Cum orice cifră nenulă poate fi scrisă ca raport cu numitorul 1, rezultă că A este inclusă în mulțimea valorilor rapoartelor din B1p

Deci A și mulțimea valorilor rapoartelor din B sunt egale.....1p

b) Grupele din care se pot forma proporțiile sunt (1,2,3,6), (1,2,4,8), (2,3,4,6) și (3,4,6,8).....2p

Din fiecare grupă se obțin 4 proporții diferite, deci C are $4 \cdot 4 = 16$ elemente (multiplu de 4).....1p

c) Din primele două grupe se obțin câte două astfel de proporții iar din ultimele două câte una, deci sunt 6 proporții.....1p

Observație: dacă elevii enumeră rapoartele, respectiv proporțiile cerute, punctajele se acordă în funcție de numărul acestora din totalul lor.

Problema 2

Câte numere naturale mai mici decât 10.000, dau restul 27 prin împărțirea la 43 și restul 23 prin împărțirea la 47.

Gazeta matematică nr.12

Barem:

Fie n numerele naturale căutate, $n < 10.000$. Conform teoremei împărțirii cu rest obținem:

$$n = 43 \cdot c_1 + 27 \mid 47$$

$$47n = 2021 \cdot c_1 + 1269$$

$$n = 47 \cdot c_2 + 23 \mid 43$$

$$\Leftrightarrow 43n = 2021 \cdot c_2 + 989 \dots\dots\dots 2p$$

Probleme selectate și propuse de prof. Gînta Florica, prof. Bozdog Constantin, prof. Seculeanu Daniela



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Scădem cele două relații și obținem: $4n = 2021 \cdot (c_1 - c_2) + 280$ 1p
Împărțim prin 4 relația și rezultă $n = \frac{1}{4} \cdot 2021 \cdot (c_1 - c_2) + 70$ 1p
Cum n este număr natural, iar $4 \nmid 2021$, deducem că $(c_1 - c_2) : 4$ 1p
Deci, $(c_1 - c_2) \in \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$ și cum $n < 10000$, vom găsi 5 numere.....2p

Problema 3

Fie A, B, C trei puncte coliniare în această ordine, $AB < AC$. Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor $[AB], [BC]$ respectiv $[AC]$ să se demonstreze :

- a) $2 \cdot (MN + PN) = AB + AC$
b) $[MN], [BP]$ au același mijloc

Barem:

- a) $2 \cdot MN = AC, 2 \cdot PN = AB$2p
Finalizare.....1p
b) Fie Q mijlocul $[MN]$ și R mijlocul $[BP]$1p
 $MQ = MR \Rightarrow Q = R$3p

Problema 4

Se consideră unghiurile proprii $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$ cu interioarele disjuncte formate în jurul punctului O . Se știe că măsura suplementului unghiului $\angle AOB$ este egală cu măsura unghiului $\angle AOC$ precum și cu măsura unghiului $\angle BOD$. Măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt exprimate, în grade, prin două numere naturale ce au cel mai mare divizor comun egal cu 30.

Determinați măsurile unghiurilor proprii $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$.

Barem:

Notăm $\angle AOB = a$ și $\angle BOC = b$. Atunci, $(a, b) = 30 \Rightarrow a = 30x, b = 30y$ cu $(x, y) = 1$ 1p
Atunci, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC \Rightarrow \angle AOC = a + b$. Dar, din ipoteză avem că $\angle AOC = 180^\circ - a$. Din cele două relații rezultă că, $2a + b = 180 \Rightarrow 60x + 30y = 180 \Rightarrow 2x + y = 6$1p
Deducem că $y \in \{2, 4\}$ 1p
Pentru $y = 2 \Rightarrow x = 2$. Nu convine pentru că $(x, y) = 1$
 $y = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 30, b = 120$ 2p
Deducem că: $\angle AOB = 30^\circ, \angle BOC = 120^\circ, \angle BOD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
 $\Rightarrow \angle DOA = 180^\circ, \angle COD = 30^\circ$2p