

BAREM CLASA A X-A

1

a) 3p

b) Folosind inegalitatea mediilor obținem $3^{\frac{a+b}{c}} + 3^{\frac{b+c}{a}} + 3^{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[3]{3^{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}}} \geq 27$ (3p)

Egalitatea are loc dacă $a = b = c$ (1p)

2 a) Presupunând că $\log_2 3 = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, se obține că $2^m = 3^n$, contradicție (2p)

b) Dacă $a \neq 1$ se obține că $\log_2 3 = \frac{\log_2 a}{\log_3 a} \in \mathbb{Q}$, fals, deci $a = 1$ care verifică (2p)

c) Există. De exemplu $a = \sqrt{2}$, $b = \log_{\sqrt{2}} 3$; $a^b = 3 \in \mathbb{Q}$, dar $a, b \notin \mathbb{Q}$ (3p)

3 a) Dacă $z = a + bi$ se obține că $a^2 - b^2 + 2abi > 0$, de unde $ab = 0$ (2p)

Dacă $a = 0$ rezultă că $z^2 = -b^2 \leq 0$, fals. Deci $b = 0$ și deci $z \in \mathbb{R}$ (1p)

b) Dacă $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ se obține că $AB^2 + BC^2 = AC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B . Dacă M este mijlocul lui $[AC]$, atunci $AC = 2BM$, adică $|z_1 - 2z_2 + z_3| = \sqrt{3}$. (4p)

4. a) Prin inducție după n . Din $f(0) + g(0) = 0$, se obține că $f(0) = g(0) = 0$.

Presupunem că $f(k) = g(k) = k$, pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat. Cum f, g sunt injective se obține că $f(n+1) \geq n+1, g(n+1) \geq n+1$, deci $f(n+1) + g(n+1) \geq 2n+2$, cu egalitate dacă $f(n+1) = g(n+1) = n+1$ (3p)

b) De exemplu $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \frac{n}{2}$ pentru n par și $f(n) = \frac{3n-1}{2}$ pentru n impar, iar $g(n) = 2n - f(n), n \in \mathbb{N}$ (4p)