



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală  
11 februarie 2023

Clasa a X-a

1. Dacă  $x, y, z \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ , demonstrați că:

$$\log_{3xy} \left(2x + \frac{y}{x}\right) + \log_{3yz} \left(2y + \frac{z}{y}\right) + \log_{3zx} \left(2z + \frac{x}{z}\right) \geq 1 + \frac{6}{\log_3(27(xyz)^2)}.$$

Precizați cazul de egalitate.

*Prof. Cristian Moanță*

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(x^2 + f(y)) = (f(x))^2 + y$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

a) Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.

b) Să se calculeze  $f(0)$ .

c) Să se calculeze  $f^{-1}(2023)$ , unde  $f^{-1}$  reprezintă inversa funcției  $f$ .

*Prof. Spiridon Cătălin*

3. Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  și  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$ . Să se calculeze  $|z_1^{2022} + z_2^{2022} + z_3^{2022}|$ .

(Supliment Gazeta Matematică nr. 11/2022)

4. Fie  $z$  un număr complex cu  $|z| \leq 1$ . Arătați că  $|z^2 - 1| \cdot |z - 1|^2 \leq 3\sqrt{3}$ .

(Gazeta Matematică nr. 12/2021)

Notă:

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se va nota cu puncte între 0 și 7*

*Timp de lucru: 3 ore*