INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a IX-a

SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația $\frac{x-2}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-6}{x}+......+\frac{2}{x}=12$

SUBIECTUL II

Fie mulțimile $A=\{x\in R \mid x^2+p_1x+q_1=0,\ p_1,q_1\in R\}$ şi $B=\{x\in R \mid x^2+p_2x+q_2=0,\ p_2,q_2\in R\}$ unde $p_1\cdot p_2=2(q_1+q_2)$. Să se arate că reuniunea celor două mulțimi este nevidă.

SUBIECTUL III

Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului C (O, R) şi $AB\cap CD=\{P\}$, arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.

SUBIECTUL IV

Fie x, y, z numere reale strict pozitive cu proprietatea că $x+y+z\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Să se arate că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2}\leq 3.$$

26612./ Gazeta de Matematică Nr. 5/2012

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL
EDUCAŢIEI

NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a X-a

SUBIECTUL I

Arătați că pentru orice $a, b \in (0,1)$ sau $(1,\infty)$ are loc relația $\log_a^2 b + \log_b^2 a \geq \log_a b + \log_b a$.

SUBIECTUL II

Să se rezolve următoarea ecuație logaritmică: $x^{\log_3(x-1)} + 2\cdot(x-1)^{\log_3 x} = 3\cdot x^2$

.

SUBIECTUL III

Să se demonstreze că dacă $z \in C^*$, atunci $\left|z+\frac{1}{z}\right|^4 \geq 4(1+2\operatorname{Re}(z^2))$.

SUBIECTUL IV

Să se determine funcţiile $f, g : (0,\infty) \to R$ cu proprietatea că $f\left(\frac{x}{3}\right)+2 \leq \log_3 x \leq g(x)-1$ şi $g\left(\frac{x}{3}\right) \leq \log_3 x \leq f(x)+1$ oricare ar fi $x \in (0,\infty)$.

26597/Gazeta Matematică nr.4/2012

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = n \cdot lnn$

a. Calculați $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$
b. Arătați că $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right) = 0$

SUBIECTUL II

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale cu proprietatea că:

$$x_{x_n} = 4n + 9, \forall n \in N^*$$

a. Arătați că există un astfel de şir.

b. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$

SUBIECTUL III

Să se arate că nu există nicio matrice $A \in M_2(R)$ astfel încât $A^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

SUBIECTUL IV

Fie $SL_2(\mathbf{Z}) = \{X \in M_2(\mathbf{Z}) | \det X = 1\}$.

Arătați că ecuația $X^2 + X^{-2} = I_2$ nu are soluții în $SL_2(Z)$.

Nr.*26612 din Gazeta Matematică Nr.12/2012*

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Să se calculeze :

a) $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}dx$ b) $\int \frac{x}{1 + x + e^x}dx$

SUBIECTUL II

Fie $f : R \to R$ o funcție primitivabilă cu proprietatea că există $a, b \in R,\ a \neq b$ astfel încât pentru oricare ar fi F primitivă a lui f are loc relația $F(x - a)F(b - x) = F(a + b - x),\ \forall x \in R$. Arătați că f se anulează în cel puțin un punct.

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + ax + by + c,\ a, b, c \in R$.

a) Să se determine a, b şi c astfel încât legea "$*$" să fie stabilă pe $(2, +\infty)$ şi să aibă element neutru.

b) Să se determine a, b şi c astfel încât $((2, +\infty), *)$ să fie grup.

c) Determinați morfismele derivabile $f : ((2, +\infty), *) \to (R_+^*, \cdot),\ f(x) = ax + b$.

SUBIECTUL IV

Fie n un număr natural, $n \geq 2$ şi $(G, \cdot)$ un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Ştiind că funcția $f : G \to G,\ f(x) = x^n$, este endomorfism al grupului, să se arate că $(G, \cdot)$ este abelian.

26549. /Gazeta de Matematică/ Nr. 12/2011

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore