

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-25 februarie 2019

CLASA A V-A
 SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Arătați că $n = \overline{ab5} + \overline{5ab} + 2019^0$ se divide cu 11.	
	b) Arătați că numărul $A = 2018^{2019} + 2019^{2018}$ nu este pătrat perfect.	
	a) Numărul $n = 100a + 10b + 5 + 500 + 10a + b + 1 = 110a + 11b + 506$	1p
	$n = 11 \cdot (10a + b + 46)$	1p
	Deci, n se divide cu 11	1p
	b) $u(2018^{2019}) = u(8^{2019}) = u(8^3) = 2$	2p
	$u(2019^{2018}) = u(9^{2018}) = 1$	1p
	$u(A) = u(2+1) = 3 \Rightarrow A$ nu este pătrat perfect	1p
2.	Determinați numerele prime p și q pentru care $p + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{10} - q = 2019$. <i>Prelucrare G.M. 1/ 2018</i>	
	Justifică faptul că p și q nu pot fi de aceeași paritate pentru că atunci membrul stâng ar fi par, iar cel drept impar, deci egalitatea este imposibilă	2p
	Cunoaște faptul că singurul număr prim și par este 2	1p
	Presupune $q = \text{par}$, deci $q = 2 \Rightarrow p \text{ prim} > 2 \Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow$ $p + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{10} - 2 > 2019 \Rightarrow$ egalitatea este imposibilă	2p
	Presupune $p = \text{par} \Rightarrow p = 2$ $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} - q = 2019 \Rightarrow 2^{11} - q = 2019$ $q = 2048 - 2019 = 29$ care este prim Soluția este $p = 2$ și $q = 29$.	2p
3	<i>M-am gândit la un număr. Îl împart la 7, câtului obținut îi adaug 4, suma rezultată o înmulțesc cu 8, iar din produsul obținut scad 24 și obțin pătratul numărului 8. Aflați la ce număr m-am gândit și scrieți divizorii acestuia.</i>	
	Aplică metoda mersului invers	1p
	$8^2 = 64$	1p
	$64 + 24 = 88$	1p
	$88 : 8 = 11$	1p
	$11 - 4 = 7$	1p
	$7 \cdot 7 = 49$	1p

	Divizorii numărului 49 sunt: 1, 7, 49	1p
4.	a) Arătați că există numerele naturale a, b, c, d, e, f, g, h astfel încât : $2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e + 2^f + 2^g + 2^h = 2019$ b) Ce cuvânt se obține aranjând crescător numerele $A = 2^{2^{222}}$, $E = 2^{222^2}$, $M = 2^{22^{22}}$, $T = 2^{22^2}$?	
	a) Scrie nr. 2019 în baza 2 : $2019 = 11111100011_{(2)}$	1p
	Nr. $11111100011_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2 + 1$	1p
	O soluție este $a = 10, b = 9, c = 8, d = 7, e = 6, f = 5, g = 1, h = 0$	1p
	b) $22^2 < 222^2 \Rightarrow T < E$	1p
	$222 < 22^{11} \Rightarrow 222^2 < 22^{22} \Rightarrow E < M$	1p
	$22^{22} < 32^{22} \Rightarrow 22^{22} < 2^{110} < 2^{222} \Rightarrow M < A$	1p
	Obține cuvântul TEMA	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală-25 februarie 2019

**CLASA A VI-A
SOLUȚII ȘI BAREM**

1.	a) Fie $\overline{abcd}$ răsturnatul numărului 2019. Calculați numărul divizorilor lui $\overline{abcd}$.	
	b) Arătați că $A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019}$ este divizibil cu 5, unde a, b, c sunt numere naturale distincte cu proprietatea că $a \cdot b \cdot c = 2019$.	
	a) Răsturnatul numărului 2019 este numărul 9102;	
	$9102 = 2 \cdot 3 \cdot 1517$	1p
	$9102 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 41$	1p
	Numărul divizorilor este $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$	1p
	b) $2019 = 1 \cdot 3 \cdot 673$, deci $\{a, b, c\} \in \{1, 3, 673\}$	1p
	$u(1^{2019}) = 1$, $u(3^{2019}) = 7$	1p
	$u(673^{2019}) = 7$	1p
2.	Se consideră mulțimile $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2018^2\}$ și $B = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, 2018^3\}$. Determinați cardinalul mulțimii $A \cap B$.	
	Mulțimea A este formată din pătrate perfecte, mulțimea B este formată din cuburi perfecte, rezultă că mulțimea $A \cap B$ este formată din elemente care sunt și cuburi perfecte și pătrate perfecte	1p
	Elementele mulțimii $A \cap B$ sunt de forma $a^6 = (a^2)^3 = (a^3)^2$	1p
	$A \cap B = \{a^6, b^6, c^6, \dots, x^6\}$ unde $x^6 < 2018^2 < 2018^3$	1p
	Deduce că cel mai mare element al mulțimii $A \cap B$ este x cu proprietatea că $x^3 < 2018$	1p
	Calculează $12^3 = 1728$ și $13^3 = 2197$	1p
	Găsește $x = 12$	1p
	$A \cap B = \{1^6, 2^6, \dots, 12^6\} \Rightarrow \text{card}(A \cap B) = 12$	1p
	Observație: dacă elevul determină elemente ale mulțimii $A \cap B$, fără a le justifica (ex. 1, 64 etc) primește maxim 2 puncte.	
3.	a) Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu 3, 7, 10. Să se arate că triunghiul este dreptunghic.	
	b) Raportul dintre numerele naturale a și b este $\frac{7}{12}$. Să se arate că $\frac{8a-3b}{b-a}$ este	

	pătrat perfect.	
	a) $\frac{A}{3} = \frac{B}{7} = \frac{C}{10}$	1p
	$A + B + C = 180^0$	1p
	$\frac{A}{3} = \frac{B}{7} = \frac{C}{10} = \frac{180}{20} = 9 \Rightarrow \frac{C}{10} = 9 \Rightarrow C = 90^0 \Rightarrow$ triunghi dreptunghic	1p
	b) $\frac{a}{b} = \frac{7}{12}$	1p
	$\frac{a}{7} = \frac{b}{12} = k \Rightarrow a = 7k ; b = 12k$	1p
	Înlocuiește a și b în relația $\frac{8a-3b}{b-a} = \frac{56k-36k}{12k-7k}$	1p
	Obține $\frac{8a-3b}{b-a} = 4 = 2^2$ este pătrat perfect.	1p
4	Considerăm unghiul ascuțit XOY . În semiplanul determinat de OX în care nu se află Y se construiesc perpendicularele $(OA$ și $(OB$ pe $(OX$, respectiv $(OY$. Notăm cu $(OC$ bisectoarea unghiului BOX . a) Arătați că $(OC$ este bisectoarea unghiului $\angle AOY$. b) Arătați că $\angle BOX$ și $\angle AOY$ sunt suplementare.	
	a) $(OC$ este bisectoarea $\angle BOX \Rightarrow \angle BOC \equiv \angle XOC$ (notație= b)	1p
	$\angle XOY$ este complementul $\angle BOX$ și $\angle AOB$ este complementul $\angle BOX$, de unde rezultă $\angle AOB \equiv \angle XOY$ (notație= a)	1p
	$\angle AOC = a + b$ și $\angle YOC = a + b \Rightarrow (OC$ este bisectoarea unghiului $\angle AOY$	1p
	b) $BO \perp OY \Rightarrow 2b + a = 90^0$	1p
	$\angle AOY = a + b + b + a = 2a + 2b$	1p
	$\angle AOY + \angle BOX = 2a + 2b + 2b = 2a + 4b = 2 \cdot (2b + a) = 180^0$	1p
	În concluzie, $\angle BOX$ și $\angle AOY$ sunt suplementare	1p
.		

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-25 februarie 2019

CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Determinați numerele naturale x și y ($x < y$) pentru care $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2817}$ <i>Prelucrare S.G.M.nr.10/2018</i>	
	b) Arătați că $\sqrt{3^{2n} + 3^{n+1} + 2}$ este irațional, oricare ar fi n număr natural.	
	a) Observă soluția $x = 0$ și $y = 2817$	1p
	$\sqrt{2817} = 3\sqrt{313}$	1p
	Găsește soluția $x = 313$ și $y = 1252$	1p
	b) $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x$ nu este pătrat perfect	1p
	$3^{2n} + 3^{n+1} + 2 = 3^n \cdot 3^n + 3^n \cdot 3 + 2 =$	1p
	$3^n \cdot 3^n + 3^n \cdot 1 + 3^n \cdot 2 + 2 = 3^n \cdot (3^n + 1) + 2 \cdot (3^n + 1) =$ $= (3^n + 1) \cdot (3^n + 2)$	1p
2.	Arătați că $8076 \cdot \frac{x \cdot y}{z}$ este cub perfect, știind că $\frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z}$ și $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 2019$.	
	$\frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z} \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{y}{y} + \frac{2}{y} = \frac{z}{z} + \frac{3}{z}$	1p
	$\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$	1p
	$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 2019 \Rightarrow \frac{3}{x} = 2019$	1p
	$x = \frac{1}{673}; y = \frac{2}{673}; z = \frac{3}{673}$	1p
	$\frac{x \cdot y}{z} = (x \cdot y) : z = \left(\frac{1}{673} \cdot \frac{2}{673} \right) : \frac{3}{673} = \frac{2}{673} = \frac{2}{2019}$	2p
	$8076 \cdot \frac{x \cdot y}{z} = 4 \cdot 2019 \cdot \frac{2}{2019} = 8 = 2^3$ este cub perfect	1p

3	a) În dreptunghiul $ABCD$ perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează pe AB în M și pe AD în P. Arătați că $DB \cdot DC = DA \cdot PC$. b) Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $CD < AB$). Se consideră punctul E pe latura (AD) și punctul F pe latura (BC) astfel încât $CE \parallel AF$. Demonstrați că $DF \parallel BE$.	
	a) $m(\angle PDB) = 90^\circ - m(\angle BDC) = m(\angle DCP)$	1p
	$\triangle ABD \sim \triangle DPC$ (cazul U.U)	1p
	$\triangle ABD \sim \triangle DPC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{PC} \Rightarrow AD \cdot PC = DC \cdot BD$	1p
	b) Fie $AD \cap BC = \{M\}$ $ABCD$ trapez $\Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MAB \Rightarrow MD \cdot MB = MA \cdot MC$ (1)	1p
	$CE \parallel AF \Rightarrow \triangle MEC \sim \triangle MAF \Rightarrow ME \cdot MF = MA \cdot MC$ (2)	1p
	Din (1) și (2) $\Rightarrow MD \cdot MB = ME \cdot MF$	1p
4.	$\frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MB} \overset{r. Thales}{\Rightarrow} DF \parallel BE$	1p
	Fie pătratul $ABCD$, M simetricul lui B față de A și $N \in (AC)$ astfel încât $m(\angle AMN) = 15^\circ$. Pe prelungirea segmentului $[AC]$, dincolo de punctul C , luăm punctul P astfel încât $[CP] \equiv [AN]$. Demonstrați că $MNPD$ este romb.	
	$\left. \begin{array}{l} m(\angle MAN) = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \\ m(\angle DCP) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow m(\angle MAN) = m(\angle DCP) = 135^\circ$	1p
	$\triangle MAN \equiv \triangle DCP$ (cazul L.U.L) $\Rightarrow MN = DP$	1p
	$NP = NC + CP = NC + AN = AC$	1p
	$\triangle MAD \equiv \triangle CDA$ (caz C.C) $\Rightarrow MD = CA \Rightarrow NP = AC = MD \Rightarrow MNPD$ paralelogram	1p
	Fie $AC \cap BD = \{O\}$; $ABCD$ pătrat $\Rightarrow DO = OB \Rightarrow PO$ mediană în $\triangle DPB$	1p
	$ABCD$ pătrat $\Rightarrow CO \perp BD \Rightarrow PO \perp DB \Rightarrow PO$ înălțime în $\triangle DPB \Rightarrow \triangle DPB$ isoscel	1p
	$m(\angle BDP) = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle PDB$ echilateral $\Rightarrow PD = DB = AC = NP$, deci $MNPD$ romb	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală-25 februarie 2019

**CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREM**

1.	a) Numărul real nenul x verifică relația $\sqrt{3} \cdot x + \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2$. Să se calculeze $3x^2 + \frac{1}{x^2}$. b) Aflați numerele reale x, y, z știind că: $\frac{x}{y^2 + y + 1} \geq \frac{1}{3}, \frac{y}{z^2 + z + 1} \geq \frac{1}{3}, \frac{z}{x^2 + x + 1} \geq \frac{1}{3}.$		RMT
	a) $\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3x^2 + 2x\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{3}$	1p	
	$(\sqrt{3} + 2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$	1p	
	Finalizare: $3x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2\sqrt{3}$	1p	
	b) $y^2 + y + 1 \leq 3x, z^2 + z + 1 \leq 3y, x^2 + x + 1 \leq 3z$	1p	
	Prin adunare se obține: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 0$	1p	
	$(x-1)^2 = (y-1)^2 = (z-1)^2 = 0$	1p	
	Deci, $x = y = z = 1$	1p	
2.	Fie $A = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2020}-\sqrt{2019}}{\sqrt{2019} \cdot \sqrt{2020}}$. a) Demonstrați că $A \in (0,1)$ b) Aflați partea întreagă a lui $\sqrt{2020} \cdot A$.		
	a) $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2019} \cdot \sqrt{2020}} - \frac{\sqrt{2019}}{\sqrt{2019} \cdot \sqrt{2020}} =$	1p	
	$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2020}}$	1p	
	$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2020}}$	1p	
	$A > 0$ și $A < 1$	1p	
	b) $\sqrt{2020} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2020}}\right) = \sqrt{2020} - 1$	1p	
	$44^2 = 1936; 45^2 = 2025 \Rightarrow \lfloor \sqrt{2020} \rfloor = 44$	1p	

	$ \sqrt{2020} \cdot A = 43$	1p
3.	Fie $ABCDEFGH$ un cub de muchie $AB = a$ și O_1 este centrul feței $CDHG$. a) Demonstrați că triunghiul CO_1F este dreptunghic. b) Dacă punctul $K \in (AC)$ astfel încât triunghiul EKC să fie isoscel, aflați valoarea raportului $\frac{AK}{KC}$.	
	a) Fie O_2 mijlocul segmentului $[CF]$; $[O_1O_2]$-linie mijlocie în $\triangle GBD \Rightarrow$ $O_1O_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	1p
	$[O_1O_2]$ este mediană în $\triangle CO_1F$, $O_1O_2 = \frac{CF}{2} = O_2F = O_2C$	1p
	Justificare $\triangle CO_1F$ este dreptunghic	1p
	b) $\nexists EKC$ este obtuz, $EK = KC \stackrel{not}{=} x$, O centrul cubului, $O \in (EC)$, $[EO] = [OC]$, $[KO]$ înălțime și mediană în $\triangle EKC$	1p
	$\triangle CKO \sim \triangle CEA$ (U. U) $\Rightarrow \frac{CK}{EC} = \frac{OC}{AC}$	1p
	$\frac{x}{a\sqrt{3}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$	1p
	$AK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, obținem $\frac{AK}{CK} = \frac{1}{3}$	1p
4.	Fie $VABC$ un tetraedru regulat cu înălțimea $[VO]$, $O \in (ABC)$. a) Dacă $VO = 6$ cm, calculați aria triunghiului BOC. b) Notăm cu O_1, simetricul lui O față de B și cu O_2 simetricul lui O față de AC. Dacă $S \in (VO)$ și $SO_1 \cap (VAB) = \{N\}$, $SO_2 \cap (VAC) = \{P\}$, arătați că $NP \parallel (ABC)$.	
	a) Notăm cu l latura tetraedrului; în $\triangle VOA$: $l^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 6^2$	1p
	Se obține $l = 3\sqrt{6}$	1p
	$A_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} A_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$	1p
	b) Fie Q simetricul lui O în raport cu C și $SQ \cap VC = \{R\}$; obținem $QO_1 \parallel BC$ și $QO_2 \parallel AC$	1p
	$(SO_1Q) \cap (VBC) = RN \Rightarrow RN \parallel O_1Q$	1p
	$(SO_2Q) \cap (VAC) = PR \Rightarrow RP \parallel O_2Q$	1p
	$(PRN) \parallel (ABC)$, $PN \subset (PRN)$, de unde $PN \parallel (ABC)$	1p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
25.02.2019

Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Determinați numerele reale x astfel încât $||x|| + [x] = 1$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Soluție:

Deoarece $||x||$ și $[x]$ sunt numere naturale rezultă că $[x] \in \{0, 1\}$...2p

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$...1p

Cum $||x|| = 1 \Rightarrow [x] = \pm 1 \Rightarrow x \in [-1, 0) \cup [1, 2)$...1p

Deci $x \in (-1, 0)$...1p

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1, 2) \Rightarrow x \in (-2, -1] \cup [1, 2)$...1p

Cum $||x|| = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1)$, ecuația nu are soluție în acest caz ...1p

2. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că :

a) $(a^2 + bc)(b^2 + ac) \geq ab(a + c)(b + c)$

b) $(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geq abc(a + b)(a + c)(b + c)$

Soluție:

- a) Desface parantezele, reduce termenii asemenea, împarte inegalitatea cu $c > 0$, trece termenii într-un membru și descompune aducând inegalitatea la forma: $(a - b)^2(a + b) \geq 0$...2p

- b) Din relația de la punctul a) obțin încă două relații analoage.

Se înmulțesc membru cu membru și se obține :

$$(a^2 + bc)^2(b^2 + ac)^2(c^2 + ab)^2 \geq a^2b^2c^2(a + b)^2(a + c)^2(b + c)^2 \quad \dots 3p$$

Finalizează și obține

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geq abc(a + b)(a + c)(b + c) \quad \dots 2p$$

3. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel încât $x_0 = 0$, $x_{n+1} = x_n + 1 + \sqrt{1 + 4x_n} \quad \forall n \geq 0$.
 Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} < 1$, $\forall n \geq 1$.

Soluție:

- Calculează cel puțin următorii trei termeni ai șirului ($x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 12$) ...1p
 Observă formula de calcul a termenului de rang n: $x_n = n(n+1)$...1p
 Demonstrează formula de calcul a termenului de rang n: $x_n = n(n+1)$...3p
 Arată că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$...2p

4. Dacă A,B,C,F,X,Y sunt puncte din plan așa încât A,B,C sunt distincte și necoliniare,
 $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BY} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, demonstrați că $3\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FY}$.

prelucrare GMB nr. 5 / 2018

Soluție:

$$\begin{aligned}
 & 3\overrightarrow{FX} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FY} \Leftrightarrow \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FY} = \vec{0} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XY} = \vec{0} \Leftrightarrow \dots 2p \\
 \Leftrightarrow & X \text{ este centrul de greutate al triunghiului ABY} \Leftrightarrow \dots 1p \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{BX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \text{ (unde M este mijlocul segmentului [AY])} \Leftrightarrow \dots 1p \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{BX} = \frac{2}{3} \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BY}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BX} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BY}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{BX} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}}{3} \Leftrightarrow \dots 2p \\
 \Leftrightarrow & \overrightarrow{BX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (adevărat)} \dots 1p
 \end{aligned}$$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
25.02.2019

Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

1. Demonstrați că dacă $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este un pătrat perfect, atunci numărul

$$q = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n-1}+(n-1)\sqrt{n}}$$
 este număr rațional.

Soluție:

După amplificarea fiecărei fracții cu conjugatul numitorului și separarea fracțiilor se obține :

$$q = \frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{1 \cdot 2} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n\sqrt{n-1}-(n-1)\sqrt{n}}{(n-1)n} = \dots 2p$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{4}}{4} + \dots + \frac{\sqrt{n-1}}{(n-1)} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \dots 3p$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{n}}{n} \in \mathbb{Q} \text{ pentru că } \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \dots 2p$$

2. Fie $a, b \in (0,1)$ cu $a \neq b$.

a) Demonstrați că $\sqrt{\log_a b} < \log_a \sqrt{ab}$.

b) Demonstrați că $\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) = \log_{\frac{a}{b}}(\log_b a)$.

Soluție:

$$a) \text{ Din inegalitatea mediilor avem } \sqrt{1 \cdot \log_a b} \leq \frac{1 + \log_a b}{2} = \frac{1}{2} \log_a(ab) = \log_a \sqrt{ab} \dots 2p$$

Cum egalitatea în inegalitatea mediilor are loc dacă și numai dacă $1 = \log_a b \Leftrightarrow a = b$,

$$\text{rezultă că } \sqrt{\log_a b} < \log_a \sqrt{ab} \dots 1p$$

$$b) \log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) = \log_{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}(\log_a b) = -\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b) = \dots 2p$$

$$= \log_{\frac{a}{b}}((\log_a b)^{-1}) = \log_{\frac{a}{b}}(\log_b a) \dots 2p$$

3. a) Fie $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și $z \in \mathbb{C}$. Demonstrați că $(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2 = 3z^2$.

b) Dacă ABC este un triunghi echilateral, de centru O și M un punct din planul (ABC) , demonstrați că $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq 3MO^2$.

Soluție:

a) $\varepsilon^3 = 1$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$ și $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$..1p

Efectuând calculele obținem

$$(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2 = 3z^2 - 2z(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 =$$
 ..1p

$$= 3z^2 - 0 + 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon = 3z^2$$
 ..1p

b) Dacă ABC este un triunghi echilateral de centru O , putem alege un sistem de axe cu originea O astfel încât punctele A, B, C, M să aibă afizele $A(1), B(\varepsilon), C(\bar{\varepsilon}), M(z)$1p

Astfel $MA^2 + MB^2 + MC^2 = |z-1|^2 + |z-\varepsilon|^2 + |z-\bar{\varepsilon}|^2 \geq$...2p

$$\geq |(z-1)^2 + (z-\varepsilon)^2 + (z-\bar{\varepsilon})^2| = |3z^2| = 3OM^2$$
 ...1p

4. Calculați partea întreagă a numărului $A = \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3$.

GMB, 5 / 2018

Soluție:

Din inegalitatea mediilor se obține

$$A = \log_3 5 + \log_5 7 + \log_7 3 \geq 3\sqrt[3]{\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 3} = 3\sqrt[3]{\log_3 3} = 3$$
 ...2p

Se arată că $\log_3 5 < \frac{3}{2}$ și că $\log_5 7 < \frac{3}{2}$...2p

Se arată că $\log_7 3 < 1$...1p

Se deduce adunând membru cu membru ultimele trei inegalități că $A < 4$...1p

Deoarece $A \in [3, 4)$ se deduce că $[A] = 3$...1p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
25.02.2019

Clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

1. Se consideră determinantul $\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}, a, b \in R.$

- a) Calculați $\Delta(a, b)$ știind că $a^3 - b^3 = \sqrt{2019}$;
 b) Dacă $x, y, z \in R$ arătați că $\Delta(x, y) + \Delta(y, z) + \Delta(z, x) = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z$.

Soluție:

- a) (4p) Adună toate liniile la prima și obține

$$\Delta(a, b) = (a^2 + ab + b^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \quad \dots 1p$$

Scade coloanele și obține $\Delta(a, b) = (a^2 + ab + b^2)(a - b)^2 \begin{vmatrix} a + b & b \\ -b & a \end{vmatrix} \quad \dots 1p$

Calculează determinantul de ordinul al doilea și obține

$$\Delta(a, b) = (a^2 + ab + b^2)^2 (a - b)^2 = (a^3 - b^3)^2 \quad \dots 1p$$

Finalizare $\Delta(a, b) = 2019 \quad \dots 1p$

- b) (3p) Folosește punctul a) și obține $\Delta(x, y) + \Delta(y, z) + \Delta(z, x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x^3 - y^3)^2 + (y^3 - z^3)^2 + (z^3 - x^3)^2 = 0 \quad \dots 2p$$

Echivalent cu $x = y = z \quad \dots 1p$

2. Fie $A, B \in M_2(C).$

- a) Arătați că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B);$

- b) Arătați că $\det(A + B) = \det(A - B)$ dacă și numai dacă $\text{tr}(AB^*) = 0$, unde $\text{tr}(AB^*)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricii $AB^*.$

Soluție:

Consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, a, b, c, d, x, y, z, t \in \mathbb{C}$

- a) (3p) Calculează $\det(A+B)$... 1p
 Calculează $\det(A-B)$... 1p
 Finalizare ... 1p
 b) (4p) Din relația de egalitate a determinanților obține $at+dx-bz-cy=0$... 1p
 Determină matricea B^* ... 1p
 Calculează $\text{tr}(AB^*)$... 1p
 Finalizare ... 1p

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = a_n - a_n^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

- a) Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ și în caz afirmativ calculați limita sa;
 b) Calculați limita $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)$.

Soluție:

- a) (3p) Demonstrează prin inducție mărginirea : $a_n \in (0,1), \forall n \geq 1$... 1p
 Demonstrează monotonia ... 1p
 Calculează limita $l=0$... 1p
 b) (4p) Aduce limita în forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}$... 2p
 Folosește relația de recurență și obține $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n)$... 1p
 Aplică punctul a) și obține limita $l=1$... 1p

4. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{3!!} \cdot \sqrt[3]{5!!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{(2n-1)!!}}}{n}$, unde $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)$.

Soluție:

Scrie limita în forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{3!!} \cdot \sqrt[3]{5!!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n^n}}$... 1p

Obține $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$... 2p

Folosește $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e}$... 1p

Obține $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e^2}$... 3p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
25.02.2019

Clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Fie $G = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 0 & 6x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 3x+1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{5} \right\} \right\}$.
- a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian.
 b) Arătați că $(\mathbb{R}^*, \cdot) \simeq (G, \cdot)$.

Soluție:

a)	Verifică axiomele grupului	4 p
b)	$f: \mathbb{R}^* \rightarrow G, f(x) = M\left(\frac{x-1}{5}\right)$	1p
	f bijectivă	1p
	f morfism de grupuri	1p

2. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ pentru orice $x, y \in G$. Să se demonstreze că G este grup abelian.
 b) Fie $(G, \cdot)$ un grup. Demonstrați că $f: G \rightarrow G, f(x) = x^{-1}$ este un automorfism dacă și numai dacă G este abelian.

Soluție:

a)	$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$	1 p
	$y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow xy = yx$	2p
b)	Presupunem f automorfism	2p
	$(xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1} \overset{a)}{\Rightarrow} G \text{ abelian}$	
	Presupunem G abelian	1p
	$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(y)f(x)$	
	f bijectivă	1p

3. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $F_n(x) = \int \frac{x^{2n-1}}{(x^{2n+1})^{\frac{n+1}{n}}} dx, x \in (0, \infty)$.
- a) Calculați $F_1(x)$.
 b) Calculați $F_n(x)$.

Soluție:

a)	$F_1(x) = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} dx.$	2 p
	$F_1(x) = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-2} \left(x + \frac{1}{x}\right)' dx.$	1p
	$F_1(x) = -\frac{x}{x^2+1} + C$	1p
b)	$F_n(x) = \int \frac{x^{n-1} - \frac{1}{x^{n+1}}}{\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{n}}} dx.$	1p
	$F_n(x) = \frac{1}{n} \int \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{n+1}{n}} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)' dx.$	1p
	$F_n(x) = -\frac{x}{n\sqrt[n]{x^{2n}+1}} + C$	1p

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}, c > 1$. Calculați integralele :

$$I = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{c + \sin 2x} dx, x \in \mathbb{R} \text{ și } J = \int \frac{b \sin x + a \cos x}{c + \sin 2x} dx, x \in \mathbb{R}$$

Prelucrare R.M.T. Nr. 1/2019

Soluție:

$I + J = (a + b) \int \frac{\sin x + \cos x}{c + 1 - (\sin x - \cos x)^2} dx$	1p
Calculează $I + J$	2p
$I - J = (b - a) \int \frac{\cos x - \sin x}{c - 1 + (\sin x + \cos x)^2} dx$	1p
Calculează $I - J$	2p
Finalizare	1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A IX-A

T1

Filiera tehnologică : Profilul tehnic-Toate specializările profesionale
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ și predicatele $p(x): |2x-1| \cdot (5-|3-4x|) \leq 0, x \in R$ și $q(x): "x$ este divizibil cu 3, $x \in A"$.

- Aflați valoarea de adevăr a propoziției $p(2) \rightarrow q(1)$.
- Determinați mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x)$.
- Aflați suma elementelor mulțimii de adevăr a predicatului $q(x)$.

a) Stabilește $v(p(2)) = 1$ $v(q(1)) = 0$ $v(p(2) \rightarrow q(1)) = 0$	1p 1p 1p
b) Cum $ 2x-1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow 5- 3-4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$ Sau $ 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A(p(x)) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	1p 1p
c) $A(q(x)) = \{3, 6, 9, \dots, 2019\}$ Determină numărul elementelor mulțimii $A(q(x))$, $n = 673$ Suma elementelor mulțimii $A(q(x)) = \frac{3+2019}{2} \cdot 673 = 1011 \cdot 673$	1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$, $\forall n \in N, n \geq 1$.

- Demonstrați, folosind eventual metoda inducției matematice că $a_n = \frac{2(n+1)}{n+2}, \forall n \in N^*$.
- Calculați produsul primilor 100 de termeni ai șirului.
- Determinați numărul termenilor naturali ai șirului.

a) Etapa de verificare Etapa de demonstrație	1p 2p
b) $a_1 \cdot a_2 \dots a_{100} = \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2(100+1)}{100+2} = 2^{100} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{101}{102} \right)$ $2^{100} \cdot \frac{2}{102} = \frac{2^{101}}{102}$	1p 1p
c) $a_n = \frac{2(n+1)}{n+2} \in N \Leftrightarrow 2 + \frac{-2}{n+2} \in N \Leftrightarrow n 2$ De unde $n \in \{1, 2\} \Rightarrow 2$ termeni naturali	1p 1p

SUBIECTUL III

Paza de coastă a instalat în largul Mării Negre balize de marcaj ce se succed la distanțe egale. A treia și a zecea baliză sunt instalate la 20 km, respectiv 48 km față de mal.

a) Determinați la ce distanță de mal este instalată a douăzecea baliză.

b) Pentru montarea primei balize s-au folosit 10 lei, pentru cea de-a treia 34 de lei, iar prețul instalării balizelor crește în progresie aritmetică. Câte balize s-au instalat, dacă s-a cheltuit în total suma de 1410 lei?

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ respectiv distanțele față de mal ale balizelor instalate. $\Rightarrow a_3 = 20, a_{10} = 48 \Rightarrow a_1 + 2r = 20, a_1 + 9r = 48.$ De unde determină $r = 4$ $a_1 = 12$ $a_{20} = 88 \Rightarrow$ a 20-a baliză se află la 88 de metri de mal.	1p 1p 1p 1p
Fie $b_1, b_2, \dots, b_n$ respectiv prețul balizelor instalate, r' rația acestei progresii. $\Rightarrow 2r' = b_2 - b_1 = 24 \Rightarrow r' = 12$ $S_n = 1410 \Rightarrow \frac{20 + (n-1) \cdot 12}{2} \cdot n = 1410$ Cum $n \in \mathbb{N}$, determină $n = 15$ numărul balizelor instalate	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu catetele $AB = AC = \sqrt{2}$ și fie punctele M, N, P , mijloacele laturilor $[BC]$, $[AB]$, respectiv $[AC]$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$, pentru orice punct O din planul triunghiului.

b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN}$.

a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ De unde concluzia	2p 1p
$\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}).$ $= -\frac{1}{2} \cdot 2\overrightarrow{AM}$ $\Rightarrow \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}$ $= 1$	1p 1p 1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A X-A

T2

Filiera tehnologică : Profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ și predicatele $p(x): |2x-1| \cdot (5-|3-4x|) \leq 0, x \in R$ și $q(x): "x$ este divizibil cu 3, $x \in A"$.

- Aflați valoarea de adevăr a propoziției $p(2) \rightarrow q(1)$.
- Determinați mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x)$.
- Aflați suma elementelor mulțimii de adevăr a predicatului $q(x)$.

a) Stabilește $v(p(2))=1$ $v(q(1))=0$ $v(p(2) \rightarrow q(1))=0$	1p 1p 1p
b) Cum $ 2x-1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow 5- 3-4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$ Sau $ 2x-1 =0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A(p(x))=\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	1p 1p
c) $A(q(x))=\{3, 6, 9, \dots, 2019\}$ Determină numărul elementelor mulțimii $A(q(x))$, $n=673$ Suma elementelor mulțimii $A(q(x))=\frac{3+2019}{2} \cdot 673=1011 \cdot 673$	1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$, $\forall n \in N, n \geq 1$.

- Demonstrați, folosind eventual metoda inducției matematice că $a_n = \frac{2(n+1)}{n+2}, \forall n \in N^*$.
- Calculați produsul primilor 100 de termeni ai șirului.
- Determinați numărul termenilor naturali ai șirului.

a) Etapa de verificare Etapa de demonstrație	1p 2p
b) $a_1 \cdot a_2 \dots a_{100} = \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2(100+1)}{100+2} = 2^{100} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{101}{102} \right)$ $2^{100} \cdot \frac{2}{102} = \frac{2^{101}}{102}$	1p 1p
c) $a_n = \frac{2(n+1)}{n+2} \in N \Leftrightarrow 2 + \frac{-2}{n+2} \in N \Leftrightarrow n 2$ De unde $n \in \{1, 2\} \Rightarrow 2$ termeni naturali	1p 1p

SUBIECTUL III

Paza de coastă a instalat în largul Mării Negre balize de marcaj ce se succed la distanțe egale. A treia și a zecea baliză sunt instalate la 20 km, respectiv 48 km față de mal.

a) Determinați la ce distanță de mal este instalată a douăzecea baliză.

b) Pentru montarea primei balize s-au folosit 10 lei, pentru cea de-a treia 34 de lei, iar prețul instalării balizelor crește în progresie aritmetică. Câte balize s-au instalat, dacă s-a cheltuit în total suma de 1410 lei?

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ respectiv distanțele față de mal ale balizelor instalate. $\Rightarrow a_3 = 20, a_{10} = 48 \Rightarrow a_1 + 2r = 20, a_1 + 9r = 48.$ De unde determină $r = 4$ $a_1 = 12$ $a_{20} = 88 \Rightarrow$ a 20-a baliză se află la 88 de metri de mal.	1p 1p 1p 1p
Fie $b_1, b_2, \dots, b_n$ respectiv prețul balizelor instalate, r' rația acestei progresii. $\Rightarrow 2r' = b_2 - b_1 = 24 \Rightarrow r' = 12$ $S_n = 1340 \Rightarrow \frac{20 + (n-1) \cdot 12}{2} \cdot n = 1410$ Cum $n \in N$, determină $n = 15$ numărul balizelor instalate	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu catetele $AB = AC = \sqrt{2}$ și fie punctele M, N, P , mijloacele laturilor $[BC]$, $[AB]$, respectiv $[AC]$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$, pentru orice punct O din planul triunghiului.

b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN}$.

a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ De unde concluzia	2p 1p
$\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}).$ $= -\frac{1}{2} \cdot 2\overrightarrow{AM}$ $\Rightarrow \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM}$ $= 1$	1p 1p 1p 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF
HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A IX-A**

T3

**Filiera teoretică: profil real, specializarea Științe ale naturii
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL I

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ și predicatele $p(x): |2x-1| \cdot (5-|3-4x|) \leq 0, x \in R$ și $q(x): "x \text{ este divizibil cu } 3 \text{ și } x \text{ nu este divizibil cu } 6, x \in A"$.

- Aflați valoarea de adevăr a propoziției $p(2) \rightarrow q(1)$.
- Determinați mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x)$.
- Aflați suma elementelor mulțimii de adevăr a predicatului $q(x)$.

a) Stabilește $v(p(2))=1$ $v(q(1))=0$ $v(p(2) \rightarrow q(1))=0$	1p 1p 1p
b) Cum $ 2x-1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow 5- 3-4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$ Sau $ 2x-1 =0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A(p(x)) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	1p 1p
c) $A(q(x)) = \{3, 6, 9, \dots, 2019\} \setminus \{6, 12, \dots, 2016\} = \{3, 9, 15, \dots, 2019\}$ Suma elementelor mulțimii $A(q(x)) = \frac{3+2019}{2} \cdot 337 = 1011 \cdot 337$	1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră șirul $(s_n)_{n \geq 1}$, $s_n = 0, \underbrace{33 \dots 3}_n, \forall n \in N, n \geq 1$.

- Știind că pentru orice $n \in N^*$ numărul s_n reprezintă suma primilor n termeni ai unui șir $(b_n)_{n \geq 1}$, demonstrați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică și precizați rația și primul său termen.
- Demonstrați $s_n = \frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n}, \forall n \in N^*$.

a) Determină $b_n = s_n - s_{n-1} = \frac{3}{10^n}$	1p
$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{10} = \text{constant}, \forall n \in N^* \Rightarrow$ șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică cu rația $\frac{1}{10}$	2p
și $b_1 = s_1 = 0,3$	1p
b) $s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n}$	1p
	1p

$s_n = \frac{3}{10} \cdot \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^n - 1}{-\frac{9}{10}}$	1p
finalizare	

SUBIECTUL III

Un disc circular este tăiat în 12 sectoare de cerc ale căror arii sunt în progresie aritmetică cu rația strict pozitivă. Știind că aria celui mai mare sector de cerc este de două ori mai mare decât a celui mai mic, determinați măsura

în grade a unghiului la centru corespunzător celui mai mic sector de cerc. ($A_{\text{sector cerc}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360}$).

Fie $s_1, s_2, \dots, s_{12}$ ariile celor 12 sectoare de cerc și R raza cercului. Cum rația r a progresiei este strict pozitivă $\Rightarrow s_{12} > s_1 \Rightarrow s_{12} = 2s_1 \Leftrightarrow s_1 + 11r = 2s_1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow s_1 = 11r$ $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{12} = \pi R^2$ Cum $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_{12} = \frac{2s_1 + 11r}{2} \cdot 12$ $= 18s_1$ De unde $18s_1 = \pi R^2 \Rightarrow s_1 = \frac{\pi R^2}{18}$ De unde obține $n^\circ = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$	1p 1p 1p 1p 1p 1p
---	---

SUBIECTUL IV

Fie O_1 și O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$.

Să se arate că :

a) Să se arate că $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$.

b) Demonstrați că dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 5\overrightarrow{O_1O_2}$ atunci $ABCD$ este paralelogram.

În acest caz dacă în plus $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}|$ atunci $ABCD$ este dreptunghi.

a) Fie O un punct oarecare din plan. Atunci $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$ $\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}}{2}$ $\frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}}{2}$	2p 1p 1p
---	-------------------------------

b) Din $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{O_1O_2}$ Tinand cont de a) deduce $3\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{0}$ De unde $O_1 = O_2 \Rightarrow ABCD$ paralelogram. Fie O centrul paralelogramului $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ De unde $AC = BD \Rightarrow$ paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi.	1p 1p 1p
--	--

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF
HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A IX-A**

T4

**Filiera teoretică: profil real, specializarea Filologie, Științe sociale
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL I

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$ și predicatele $p(x): |2x-1| \cdot (5-|3-4x|) \leq 0, x \in R$ și $q(x): "x$ este divizibil cu 3, $x \in A"$.

- Aflați valoarea de adevăr a propoziției $p(2) \rightarrow q(1)$.
- Determinați mulțimea valorilor de adevăr ale predicatului $p(x)$.
- Aflați suma elementelor mulțimii de adevăr a predicatului $q(x)$.

a) Stabilește $v(p(2))=1$ $v(q(1))=0$ $v(p(2) \rightarrow q(1))=0$	1p 1p 1p
b) Cum $ 2x-1 \geq 0, \forall x \in R \Rightarrow 5- 3-4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty)$ Sau $ 2x-1 =0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A(p(x)) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, \infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$	1p 1p
c) $A(q(x)) = \{3, 6, 9, \dots, 2019\}$ Determină numărul elementelor mulțimii $A(q(x))$, $n = 673$ Suma elementelor mulțimii $A(q(x)) = \frac{3+2019}{2} \cdot 673 = 1011 \cdot 673$	1p 1p

SUBIECTUL II

- Să se demonstreze că $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2, \forall n \in N^*$.
- Să se calculeze suma $S = \left\lfloor \sqrt{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3 \cdot 6} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \sqrt{2016 \cdot 2019} \right\rfloor$,
unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

a) Ridică la pătrat și demonstrează inegalitatea	3p
b) Conform punctului anterior, deduce $S = \left\lfloor \sqrt{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{3 \cdot 6} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \sqrt{2016 \cdot 2019} \right\rfloor = 3 + 4 + \dots + 2017$ De unde $S = \frac{3+2017}{2} \cdot 2015 = 2015^2$	2p 2p

SUBIECTUL III

Paza de coastă a instalat în largul Mării Negre balize de marcaj ce se succed la distanțe egale. A treia și a zecea baliză sunt instalate la 20 km, respectiv 48 km față de mal.

- Determinați la ce distanță de mal este instalată a douăzecea baliză.
- Pentru montarea primei balize s-au folosit 10 lei, pentru cea de-a treia 34 de lei, iar prețul instalării balizelor crește în progresie aritmetică. Câte balize s-au instalat, dacă s-a cheltuit în total suma de 1410 lei?

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ respectiv distanțele față de mal ale balizelor instalate. $\Rightarrow a_3 = 20, a_{10} = 48 \Rightarrow a_1 + 2r = 20, a_1 + 9r = 48.$ De unde determină $r = 4$ $a_1 = 12$ $a_{20} = 88 \Rightarrow$ a 20-a baliză se află la 88 de metri de mal.	1p 1p 1p 1p
Fie $b_1, b_2, \dots, b_n$ respectiv prețul balizelor instalate, r' rația acestei progresii. $\Rightarrow 2r' = b_3 - b_1 = 24 \Rightarrow r' = 12$ $S_n = 1410 \Rightarrow \frac{20 + (n-1) \cdot 12}{2} \cdot n = 1410$ Cum $n \in N$, determină $n = 15$ numărul balizelor instalate.	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

Se consideră șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $n \geq 1$.

- Demonstrați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.
- Determinați $n \in N^*$ astfel încât $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 3069$.
- Determinați numărul natural k știind că numerele $1024b_k; b_{25}; 2b_{k+9}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2 = \text{constant} \Rightarrow (b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică cu rația 2	2p
b) Determină $b_1 = 3$	1p
$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 3069 \Leftrightarrow 3 \cdot (2^n - 1) = 3069$	1p
$\Leftrightarrow n = 10$	1p
c) $b_{25} = \frac{1024b_k + 2b_{k+9}}{2} \Leftrightarrow 2^{23} = \frac{2^{10} \cdot 2^{k-2} + 2 \cdot 2^{k+7}}{2}$	1p
De unde $k = 15$.	1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF
HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019**

CLASA A X-A

T1

**Filiera tehnologică: profil tehnic-toate specializările
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL I

Fie $a = \lg 2$ și $b = \lg 3$.

- a) Demonstrați că $\lg 5 = 1 - a$
 b) Demonstrați că $(2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$.
 c) Exprimați în funcție de a și de b numărul $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)}$.

a) $\lg 5 = \lg \frac{10}{2}$ $= \lg 10 - \lg 2 = 1 - \lg 2 = 1 - a$	1p 1p
b) $\log_{25} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 25} = \frac{\lg 2^2 + \lg 3}{\lg 5^2} = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2\lg 5}$ $= \frac{2a + b}{2(1 - a)}$ $\Rightarrow (2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$	1p 1p
c) $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)} = 5^{3 \cdot \log_{5^3}(\lg 150)} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3} \log_5(\lg 150)}$ $= 5^{\log_5(\lg 150)} = \lg 150$ $x = \lg(5^2 \cdot 2 \cdot 3) = 2\lg 5 + \lg a + \lg b = 2(1 - a) + a + b = 2 - 2a + a + b = 2 - a + b$	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

- a) Comparați numerele $a = (\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}})^{\frac{1}{2}}$ și $b = \sqrt[3]{675} - \sqrt[3]{200}$.
 b) Rezolvați ecuația $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{\frac{7}{6}} = 0$

1) Scrie numărul a sub forma $a = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ și numărul b sub forma $b = 3 \cdot \sqrt[3]{25} - 2 \cdot \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$ Compară $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{2}{3}} \rightarrow a < b$	1p 1p 1p
2) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{7/6} = 0$; $\Delta = 5 - 2 \cdot 5^{7/6} + \sqrt[3]{625}$ $\Delta = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{25})^2$ $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{25} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ $x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{25}$	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

Fie $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$

a) Calculați z_2

b) Calculați z_{2019}

c) Arătați că $z_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) $(1+i)^2 + (1-i)^2 = 1+2i+i^2 + 1-2i+i^2$ $1+2i-1+1-2i-1 = 0$	1p 1p
b) $z_{2019} = (1+i)^{2019} + (1-i)^{2019} = (1+i)^{2018} \cdot (1+i) + (1-i)^{2018} \cdot (1-i)$ $= ((1+i)^2)^{1009} \cdot (1+i) + ((1-i)^2)^{1009} (1-i) = (2i)^{1009} (1+i) + (-2i)^{1009} (1-i)$ $= 2^{1009} \cdot i^{1009} (1+i) + (-2^{1009}) \cdot i^{1009} \cdot (1-i) =$ $2^{1009} \cdot i \cdot (1+i) - 2^{1009} \cdot i \cdot (1-i) =$ $2^{1009} \cdot (i+i^2-i+i^2) = -2^{2010}$	1p 1p 1p
c) $\overline{z_n} = \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} = \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} = (1-i)^n + (1+i)^n$ $\overline{z_n} = z_n \Rightarrow z_n \in \mathbb{R}$	1p 1p

SUBIECTUL IV

1) Determinați $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1|$.

2) Calculați $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2}))$.

1) $ z = \left \frac{1}{z} \right \Rightarrow z = \frac{1}{ z } \Rightarrow z ^2 = 1 \Rightarrow z = 1$ Dacă $z = a+bi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ $ z = z-1 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Rightarrow -2a+1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	1p 1p 1p 1p
2) Calculează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = \log_{\frac{1}{3^2}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = 2 \cdot \log_3(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) =$ $= 2 \cdot (2 + \log_3(\sqrt{2}-1)) = 4 + 2 \cdot \log_3(\sqrt{2}-1) = 4 + \log_3(\sqrt{2}-1)^2 = 4 + \log_3(3-2\sqrt{2})$ Calculează $\log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = \log_{3^{-1}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = -\log_3(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) =$ $= -1 - \log_3(3-2\sqrt{2})$ Finalizează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = 3$	1p 1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A X-A

T2

Filiera tehnologică: profil tehnic-toate specializările
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL IFie $a = \lg 2$ și $b = \lg 3$.

- a) Demonstrați că $\lg 5 = 1 - a$
b) Demonstrați că $(2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$.
c) Exprimați în funcție de a și de b numărul $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)}$.

a) $\lg 5 = \lg \frac{10}{2}$ $= \lg 10 - \lg 2 = 1 - \lg 2 = 1 - a$	1p 1p
b) $\log_{25} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 25} = \frac{\lg 2^2 + \lg 3}{\lg 5^2} = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2\lg 5}$ $= \frac{2a + b}{2(1 - a)}$ $\Rightarrow (2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$	1p 1p
c) $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)} = 5^{3 \cdot \log_{5^3}(\lg 150)} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3} \log_5(\lg 150)}$ $= 5^{\log_5(\lg 150)} = \lg 150$ $x = \lg(5^2 \cdot 2 \cdot 3) = 2\lg 5 + \lg a + \lg b = 2(1 - a) + a + b = 2 - 2a + a + b = 2 - a + b$	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

- a) Comparați numerele $a = (\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}})^{\frac{1}{2}}$ și $b = \sqrt[3]{675} - \sqrt[3]{200}$.
b) Rezolvați ecuația $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{\frac{7}{6}} = 0$

1) Scrie numărul a sub forma $a = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ și numărul b sub forma $b = 3 \cdot \sqrt[3]{25} - 2 \cdot \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$ Compară $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{2}{3}} \rightarrow a < b$	1p 1p 1p
2) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{7/6} = 0$; $\Delta = 5 - 2 \cdot 5^{7/6} + \sqrt[3]{625}$ $\Delta = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{25})^2$ $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{25} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ $x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{25}$	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

Fie $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$

a) Calculați z_2

b) Calculați z_{2019}

c) Arătați că $z_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) $(1+i)^2 + (1-i)^2 = 1 + 2i + i^2 + 1 - 2i + i^2$ $1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0$	1p 1p
b) $z_{2019} = (1+i)^{2019} + (1-i)^{2019} = (1+i)^{2018} \cdot (1+i) + (1-i)^{2018} \cdot (1-i)$ $= ((1+i)^2)^{1009} \cdot (1+i) + ((1-i)^2)^{1009} (1-i) = (2i)^{1009} (1+i) + (-2i)^{1009} (1-i)$ $= 2^{1009} \cdot i^{1009} (1+i) + (-2)^{1009} \cdot i^{1009} \cdot (1-i) =$ $2^{1009} \cdot i \cdot (1+i) - 2^{1009} \cdot i \cdot (1-i) =$ $2^{1009} \cdot (i + i^2 - i + i^2) = -2^{2010}$	1p 1p 1p
c) $\overline{z_n} = \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} = \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} = (1-i)^n + (1+i)^n$ $\overline{z_n} = z_n \Rightarrow z_n \in \mathbb{R}$	1p 1p

SUBIECTUL IV

1) Determinați $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z-1|$.

2) Calculați $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2}))$.

1) $ z = \left \frac{1}{z} \right \Rightarrow z = \frac{1}{ z } \Rightarrow z ^2 = 1 \Rightarrow z = 1$ Dacă $z = a+bi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ $ z = z-1 \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Rightarrow -2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ $z_1 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$	1p 1p 1p 1p
2) Calculează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = \log_{\frac{1}{3^2}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = 2 \cdot \log_3(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) =$ $= 2 \cdot (2 + \log_3(\sqrt{2}-1)) = 4 + 2 \cdot \log_3(\sqrt{2}-1) = 4 + \log_3(\sqrt{2}-1)^2 = 4 + \log_3(3-2\sqrt{2})$ Calculează $\log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = \log_{3^{-1}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = -\log_3(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) =$ $= -1 - \log_3(3-2\sqrt{2})$ Finalizează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = 3$	1p 1p 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF
HAIMOVICI" etapa locală – 25 februarie 2019**

T3

CLASA A X-A

**Filiera teoretică: profil real, specializarea Științe ale naturii
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL I

1. a) Comparați numerele $a = (\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{\sqrt{5}})^{\frac{1}{2}}$ și $b = \sqrt[3]{297} - \sqrt[3]{88}$
 b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{\frac{7}{6}} = 0$.

2. Arătați că $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - \log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + \sqrt{3})$.

1a) Scrie numărul a sub forma $a = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$ și numărul b sub forma $b = 3 \cdot \sqrt[3]{11} - 2 \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{121}$ și finalizează $a > b$.	1p 1p
1b) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{7/6} = 0$; $\Delta = 5 - 2 \cdot 5^{7/6} + \sqrt[3]{625}$ $\Delta = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{25})^2$ $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{25} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ $x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{25}$	1p 1p
2. Observă că $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^{-1}$ de unde $\log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = -1$ Atunci $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - \log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - (-1)\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) =$ $= \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right) + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{2}} 2 = 4$	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

Fie $a = \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}$.

- a) Arătați că $a^3 + 3a - 6\sqrt{3} = 0$.

- b) Calculați $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2+3}{6}\right) + \log_a\left(\frac{6\sqrt{3}}{a} - 3\right) + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{a}$.

a) $a^3 = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}} + 3\sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3} =$ $= 6\sqrt{3} - 3(\sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}) = 6\sqrt{3} - 3a$ de unde $a^3 + 3a - 6\sqrt{3} = 0$.	1p 1p
b) Cum $a^3 + 3a - 6\sqrt{3} = 0$ vom avea că $a(a^2 + 3) = 6\sqrt{3}$ adică $\frac{a^2+3}{6} = \frac{\sqrt{3}}{a}$ deci $\log_{\sqrt{3}} \frac{a^2+3}{6} = \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{a} = 1 - \log_{\sqrt{3}} a$ Cum $a^3 + 3a - 6\sqrt{3} = 0$ vom avea că $a(a^2 + 3) = 6\sqrt{3}$ adică $\frac{6\sqrt{3}}{a} = a^2 + 3$ și deci $\log_a\left(\frac{6\sqrt{3}}{a} - 3\right) = \log_a(a^2 + 3 - 3) = 2$ $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{a} = \log_{\sqrt{3}} a$ și finalizare $\log_{\sqrt{3}} \frac{a^2+3}{6} + \log_a\left(\frac{6\sqrt{3}}{a} - 3\right) + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{a} = 3$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

Fie $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_n(z) = (z+i)^n + (z-i)^n, n \in \mathbb{N}$

a) Calculați $f_{2019}(1)$.

b) Demonstrați că $f_n(1) \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Rezolvați ecuația $f_3(z) = 0$ în mulțimea numerelor complexe.

a) $f_{2019}(1) = (1+i)^{2019} + (1-i)^{2019} =$ $= ((1+i)^2)^{1009} \cdot (1+i) + ((1-i)^2)^{1009} \cdot (1-i)$ $= (2i)^{1009} \cdot (1+i) + (-2i)^{1009} \cdot (1-i) =$ $= 2^{1009}i \cdot (1+i) - 2^{1009}i \cdot (1-i) = -2^{1010}$	1p 1p
b) $\overline{f_n(1)} = \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} = \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} = (1-i)^n + (1+i)^n = f_n(1)$ Cum $\overline{f_n(1)} = f_n(1)$ avem că $f_n(1) \in \mathbb{R}$	1p 1p
c) $f_3(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^3 = -(z-i)^3 \Rightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = -1$ <i>obs. i nu e soluție</i>	1p
$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = \cos \pi + i \sin \pi$ $\frac{z+i}{z-i} = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$	1p
$k = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3}, k = 1 \Rightarrow z = 0, k = 2 \Rightarrow z = -\sqrt{3}$	1p

SUBIECTUL IV

1. Se consideră ecuația $z^2 + (m-i) \cdot z - m - 2i - 1 = 0$. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația, știind că admite o soluție reală.

2. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$ distincte două câte două. Dacă $\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y}$ atunci demonstrați că $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 1$.

1) a) Fie $a \in \mathbb{R}$ soluția reală a ecuației, adică $a^2 + am - ai - m - 2i - 1 = 0$.	1p
$\begin{cases} a^2 + am - m - 1 = 0 \\ -a - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ m = 1 \end{cases}$	1p
b) Observă $m = 1 \xrightarrow{a)} x_1 = -2$ Din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 = -1 + i$ și deci $x_2 = 1 + i$	1p
1) $\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y} \stackrel{m}{=} k \Rightarrow \lg x = k(y-z); \lg y = k(z-x); \lg z = k(x-y)$ Avem $x = 10^{k(y-z)}, y = 10^{k(z-x)}, z = 10^{k(x-y)}$ De unde $x^x = 10^{k(yx-zx)}, y^y = 10^{k(zy-xy)}$ și $z^z = 10^{k(xz-yz)}$. Prin înmulțirea ultimelor trei egalități se obține $x^x \cdot y^y \cdot z^z = 10^{kxy-kxz+kzy-kxy+kxz-kzy} = 10^0 = 1$.	1p 1p 1p 1p

T4

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI" etapă locală – 25 februarie 2019
CLASA A X-A

Filiera teoretică-Profilul uman-Specializarea Filologie, Științe Sociale
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL IFie $a = \lg 2$ și $b = \lg 3$. a) Demonstrați că $\lg 5 = 1 - a$.b) Demonstrați că $(2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$.c) Exprimați în funcție de a și de b numărul $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)}$.

a) $\lg 5 = \lg \frac{10}{2}$ $= \lg 10 - \lg 2 = 1 - \lg 2 = 1 - a$	1p 1p
b) $\log_{25} 12 = \frac{\lg 12}{\lg 25} = \frac{\lg 2^2 + \lg 3}{\lg 5^2} = \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2\lg 5}$ $= \frac{2a + b}{2(1 - a)}$ $\Rightarrow (2 - 2a) \cdot \log_{25} 12 = 2a + b$	1p 1p
c) $x = 5^{\log_{125}((\lg 150)^3)} = 5^{3 \cdot \log_5(\lg 150)} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3} \log_5(\lg 150)}$ $= 5^{\log_5(\lg 150)} = \lg 150$ $x = \lg(5^2 \cdot 2 \cdot 3) = 2\lg 5 + \lg 2 + \lg 3 = 2(1 - a) + a + b = 2 - 2a + a + b = 2 - a + b$	1p 1p 1p

SUBIECTUL IIa) Comparați numerele $a = (\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}})^{\frac{1}{2}}$ și $b = \sqrt[3]{675} - \sqrt[3]{200}$.b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{\frac{7}{6}} = 0$.

a) Scrie numărul a sub forma $a = \sqrt{5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ și numărul b sub forma $b = 3 \cdot \sqrt[3]{25} - 2 \cdot \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$ Compara $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} \rightarrow 5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{2}{3}} \rightarrow a < b$	1p 1p 1p
b) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt[3]{25}) \cdot x + 5^{7/6} = 0; \Delta = 5 - 2 \cdot 5^{7/6} + \sqrt[3]{625}$ $\Delta = (\sqrt{5} - \sqrt[3]{25})^2$ $x_1 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{25} + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ $x_2 = \frac{\sqrt{5} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} - \sqrt{5}}{2} = \sqrt[3]{25}$	1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL III

- a) Demonstrați că numărul $\frac{\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{3}+2} - \frac{12}{\sqrt{3}}$ este număr natural.
- b) Dacă $a \in (0, 2), b > 0, c > 0$ și $\sqrt{abc} > 2$ să se arate că $\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{abc}-2} > \frac{7}{10}$.

a)	$\frac{\sqrt[3]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{3}+2} - \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{3}+2} - \frac{12}{\sqrt{3}}$	1p
	$\frac{(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}+2} - \frac{12}{\sqrt{3}}$	1p
	$-(\sqrt{3}-2)^2 - 4\sqrt{3} = 7 \in \mathbb{N}$	2p
b)	$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}{\sqrt{abc}-2} = \frac{\sqrt{abc-4\sqrt{abc}+4}}{(\sqrt{abc}-2)\sqrt{a}}$	1p
	$\frac{\sqrt{(\sqrt{abc}-2)^2}}{(\sqrt{abc}-2)\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$	1p
	$a \in (0, 2) \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Justifică } \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{7}, \text{ de unde concluzia.}$	1p

SUBIECTUL IV

- 1) Calculați $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - \log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}) \cdot \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.
- 2) Calculați $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2}))$.

1) Observă că $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^{-1}$ de unde $\log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}) = -1$	1p
Atunci $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - \log_{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}) \cdot \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$	1p
$= \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) - (-1)\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$	
$= \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right) + \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{2}} 2 = 4$	1p
2) Calculează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) = 2 \cdot \log_3(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) =$	1p
$= 2 \cdot (2 + \log_3(\sqrt{2}-1)) = 4 + 2 \cdot \log_3(\sqrt{2}-1) = 4 + \log_3(\sqrt{2}-1)^2 = 4 + \log_3(3-2\sqrt{2})$	1p
Calculează $\log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = \log_{3^{-1}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = -\log_3(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) =$	
$= -(\log_3 3 + \log_3(3-2\sqrt{2})) = -1 - \log_3(3-2\sqrt{2})$	1p
Finalizează $\log_{\sqrt{3}}(9 \cdot (\sqrt{2}-1)) + \log_{\frac{1}{3}}(3 \cdot (3-2\sqrt{2})) = 4 - 1 = 3$	1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 25 februarie 2019

T1

CLASA A XI-A

Filiera tehnologică : Profilul tehnic-toate specializările profesionale

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

- a) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^2 = a \cdot A$.
 b) Calculați $A + A^2 + A^3 + A^4$.
 c) Calculați $(A - A')^{2019}$, unde A' este transpusa matricei A .

Soluție

a) Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	1p
Determină $a = 3$	1p
b) Observă că $A^3 = 3^2 A$, $A^4 = 3^3 A$	1p
Calculează $A + A^2 + A^3 + A^4 = 40A$	1p
c) Determină $B = A - A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1p
Determină $B^2 = -I_2$	1p
Calculează $B^{2019} = (A - A')^{2019} = -B$	1p

SUBIECTUL II

Calculați limitele

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 1)}{x}$

Soluție

a) Scrie $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2 + x^2 - 16}{x - 4}$	1p
Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$	1p
Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)} = 8$	1p
Finalizare 33/4	1p
b) Scrie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{x} =$	1p
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$	1p
Finalizare $2 + 3 = 5$	1p

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n + 2019}{x^{2018} + n}$, $n \in \mathbf{N}$.

- Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a funcției f_{2019} .
- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$. Discuție după $n \in \mathbf{N}$.

Soluție

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2019}(x) = \infty \Rightarrow$ nu avem asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p
Determină $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2019}(x)}{x} = 1$	1p
Determină $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f_{2019}(x) - x) = 0$	1p
Finalizare $y = x$ asimptotă oblică spre $+\infty$	1p
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(1 + \frac{2019}{x^n}\right)}{x^{2018} \left(1 + \frac{n}{x^{2018}}\right)}$	1p
$= \begin{cases} 1, & n = 2018 \\ 0, & n < 2018 \\ \infty, & n > 2018 \end{cases}$	2p

SUBIECTUL IV

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_k(k-1; 4k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

- Demonstrați că există o dreaptă în plan care conține orice punct A_k , $k \in \mathbf{Z}$.
- Determinați $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $A_{\Delta O A_k A_{k+2}} = 9$.

Soluție

a) Fie punctele A_n, A_m, A_p cu $n \neq m \neq p \neq n$	1p
Calculează Δ și obține $\Delta = 0 \Rightarrow$ punctele A_n, A_m, A_p coliniare	2p
b) $A_{\Delta O A_k A_{k+2}} = \frac{ \Delta }{2}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k-1 & 4k-1 & 1 \\ k^2-1 & 4k^2-1 & 1 \end{vmatrix} = -3k^2 + 3k$	2p
$A_{\Delta O A_k A_{k+2}} = 9 \Rightarrow -3k^2 + 3k = 18 \Rightarrow -3k^2 + 3k = \pm 18$	1p
Rezolvă ecuațiile și obține $k = 3 \in \mathbf{N}$	1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 25 februarie 2019

T2

CLASA A XI-A**Filiera tehnologică – Profil servicii, resurse naturale și protecția mediului****BAREM DE CORECTARE****SUBIECTUL I**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$.

- a) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^2 = a \cdot A$.
 b) Calculați $A + A^2 + A^3 + A^4$.
 c) Calculați $(A - A')^{2019}$, unde A' este transpusa matricei A .

Soluție

a) Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	1p
Determină $a = 3$	1p
b) Observă că $A^3 = 3^2 A$, $A^4 = 3^3 A$	1p
Calculează $A + A^2 + A^3 + A^4 = 40A$	1p
c) Determină $B = A - A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	1p
Determină $B^2 = -I_2$	1p
Calculează $B^{2019} = (A - A')^{2019} = -B$	1p

SUBIECTUL II

Calculați limitele

- a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 1)}{x}$

Soluție

a) Scrie $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2 + x^2 - 16}{x - 4}$	1p
Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$	1p
Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)} = 8$	1p
Finalizare 33/4	1p
b) Scrie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x} - 2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 2}{x} =$	1p
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$	1p
Finalizare 2 + 3 = 5	1p

SUBIECTUL III

Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n + 2019}{x^{2018} + n}$, $n \in \mathbf{N}$.

- a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a funcției f_{2019} .
 b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$. Discuție după $n \in \mathbf{N}$.

Soluție

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2019}(x) = \infty \Rightarrow$ nu avem asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p
Determină $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2019}(x)}{x} = 1$	1p
Determină $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f_{2019}(x) - x) = 0$	1p
Finalizare $y = x$ asimptotă oblică spre $+\infty$	1p
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(1 + \frac{2019}{x^n}\right)}{x^{2018} \left(1 + \frac{n}{x^{2018}}\right)}$	1p
$= \begin{cases} 1, & n = 2018 \\ 0, & n < 2018 \\ \infty, & n > 2018 \end{cases}$	2p

SUBIECTUL IV

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_k(k-1; 4k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

- a) Demonstrați că există o dreaptă în plan care conține orice punct A_k , $k \in \mathbf{Z}$.
 b) Determinați $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $A_{\Delta O A_k A_{k^2}} = 9$.

Soluție

a) Fie punctele A_n, A_m, A_p cu $n \neq m \neq p \neq n$ Calculează Δ și obține $\Delta = 0 \Rightarrow$ punctele A_n, A_m, A_p coliniare	1p 2p
b) $A_{\Delta O A_k A_{k^2}} = \frac{ \Delta }{2}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k-1 & 4k-1 & 1 \\ k^2-1 & 4k^2-1 & 1 \end{vmatrix} = -3k^2 + 3k$	2p
$A_{\Delta O A_k A_{k^2}} = 9 \Rightarrow -3k^2 + 3k = 18 \Rightarrow -3k^2 + 3k = \pm 18$	1p
Rezolvă ecuațiile și obține $k = 3 \in \mathbf{N}$	1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 25 februarie 2019

T3

CLASA A XI-A

Filiera teoretică: profil real, specializarea Științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ și mulțimea $\mathbf{C}(A) = \{X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \mid AX = XA\}$.

- a) Demonstrați că matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}(A)$.
- b) Demonstrați că dacă $X \in \mathbf{C}(A)$ atunci există numerele reale a, b astfel încât $X = (a+b) \cdot I_2 - b \cdot A$.
- c) Determinați matricele $X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $X^{2019} = A$.

Soluție

a) Arată $AB = BA$	1p
b) $X \in \mathbf{C}(A) \Rightarrow AX = XA, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{pmatrix}$ $XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ c+2d & -c-2d \end{pmatrix}$ $\Rightarrow c = -2b, d = a+3b$ Arată $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+3b \end{pmatrix} = (a+b)I_2 - bA$	1p 1p 1p 1p
c) $XA = XX^n = X^{n+1} = X^n X = AX \Rightarrow X \in \mathbf{C}(A) \xRightarrow{(b)} X = (a+b)I_2 - bA$ și $\det(X^{2019}) = \det A = 0 \Rightarrow \det X = 0$ Din relația lui Hamilton - Cayley avem $X^2 = (\text{tr} X) \cdot X = (2a+3b) \cdot X$ $\Rightarrow X^{2019} = (2a+3b)^{2018} X \Rightarrow (2a+3b)^{2018} X = A$ $\Rightarrow 2a+3b \neq 0 \Rightarrow (2a+3b)^{2018} a = 1 \text{ și}$ $(2a+3b)^{2018} b = -1 \Rightarrow a = -b \Rightarrow X = -bA$ $X^{2019} = -b^{2019} A \Rightarrow b = -1, a = 1 \text{ și } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

1. Calculați limitele

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$

2. Determinați parametrii reali a și b astfel încât $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{ax^2 + bx + 5} \right) = -\frac{1}{2}$.

Soluție

a) Scrie $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + x^2 - 18}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2 + x^2 - 16}{x - 4}$ Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$ Calculează $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)} = 8$ Finalizare 33/4	1p 1p
b) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = 2 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{\left(x - \frac{\pi}{6} \right)} =$ $\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right)}{\left(x - \frac{\pi}{6} \right)}$ $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (sau : Fie $y = x - \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(y + \frac{\pi}{6} \right) - 1}{6 \left(y + \frac{\pi}{6} \right) - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin y \cos \frac{\pi}{6} + 2 \cos y \sin \frac{\pi}{6} - 1}{6y}$ 1p $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \sin y}{6y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - 1}{6y} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{y}{2}}{6y}$ 1p Finalizare $\frac{\sqrt{3}}{6} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{6}$) 1p	1p 1p 1p
c) Determină $a = 1$ Determină $b = 1$	1p 1p

SUBIECTUL III

a) Să se determine asimptota spre $+\infty$ a funcției $f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

b) Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n + 1)}{x} = 2019 \cdot 1010$

Soluție

a) Domeniul de definiție al funcției este $D = \mathbf{R} - \{-1; 0\}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right)$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} \cdot \frac{1}{x(x+1)}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1.$ $y = 1$ asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p 1p 1p 1p
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx} - n + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right)$ $= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2019 \cdot 2020}{2} \Rightarrow n = 2019$	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

- În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_k(k-1; 4k-1)$, $k \in \mathbf{Z}$.
 - Demonstrați că există o dreaptă în plan care conține orice punct A_k , $k \in \mathbf{Z}$.
 - Demonstrați că oricare ar fi punctul A_k și un punct M situat pe dreapta de ecuație $4x - y = -3$ astfel încât $A_{\Delta O A_k M} = 9$, distanța de la punctul M la punctul A_k nu depinde de k , și determinați această distanță.

Soluție

a) Demonstrează că punctele A_k, A_0, A_1 sunt coliniare, $\forall k \in \mathbf{Z}$ de unde $A_k \in A_0 A_1$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.	2p 1p
b) $M \in d : 4x - y = -3 \Rightarrow \exists p \in \mathbf{R}$ astfel încât $M(p-1, 4p-1)$ (sau consideră $M(p, 4p+3)$) $\Rightarrow A_{\Delta O A_k M} = \frac{ \Delta }{2}, \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k-1 & 4k-1 & 1 \\ p-1 & 4p-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ p-1 & 3 \end{vmatrix} = 3(k-p)$ $A_{\Delta O A_k M} = 9 \Rightarrow 3 k-p = 18 \Rightarrow k-p = 6$ obține $MA_k = \sqrt{17(k-p)^2} = k-p \sqrt{17} = 6\sqrt{17} = \text{constant}$ (sau consideră $M(p, 4p+3)$ -1p, calculează determinantul -1p, determină distanța 2p)	1p 1p 1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 25 februarie 2019

T4

CLASA A XI-A

Filiera teoretică: profil uman-specializarea Filologie , Științe Sociale

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

La o olimpiadă de matematică elevii unei școli au obținut următoarele rezultate grupate în tabelul :

Punctaj (x_i)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)
Frecvența (n_i)	16	26	35	47	24	13

- Precizați populația statistic , unitatea statistică , efectivul total al populației statistice, caracteristica unității statistice.
- Să se completeze tabelul cu frecvențele absolute cumulate crescător și descrescător.
- Să se calculeze valoarea medie a seriei statistice .

Soluție

a) Populația statistică: elevii unei școli Unitatea statistică : fiecare elev Efectivul total : $N = 161$ Caracteristica unității statistice : punctajul fiecărui elev							2p (0,5x4)
b)							1p 1p
Punctaj (x_i)	[40,50)	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100)	
Frecvența (n_i)	16	26	35	47	24	13	
Frecvența absolută cumulată crescător (N_i)	16	42	77	124	148	161	
Frecvența absolută cumulată descrescător (N'_i)	161	145	119	84	37	13	
c) $\bar{x} = \frac{\sum x_i^* n_i}{\sum n_i}$, unde $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ale claselor de valori $[x_i, x_{i+1})$ $\bar{x} = \frac{45 \cdot 16 + 55 \cdot 26 + 65 \cdot 35 + 75 \cdot 47 + 85 \cdot 24 + 95 \cdot 13}{161}$ $= \frac{11225}{161} \approx 69.72$							1p 1p 1p

a)								3p
Nr total goluri	0	1	2	3	4	5	6	
Nr. partide	5	11	8	10	7	5	4	
b)								2p
Nr total goluri	0	1	2	3	4	5	6	
Nr. partide	5	11	8	10	7	5	4	
Frecvența relativă (f_i)	10%	22%	16%	20%	14%	10%	8%	
Frecvența relativă cumulată crescător (F_i)	10%	32%	48%	68%	82%	92%	100%	
Frecvența relativă cumulată descrescător (F'_i)	100%	90%	68%	52%	32%	18%	8%	1p

SUBIECTUL III

În tabelele următoare sunt prezentate notele obținute de elevii unor clase la teza de matematică pe semestrul I :

a XI-a A						
Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	4	3	5	5	3	4

a XI-a B						
Nota	4	5	6	7	8	9
Număr elevi	1	1	2	8	9	4

- Să se reprezinte histograma pentru prima serie statistică
- Care clasă este mai bună ? (*are media cea mai mare*)
- Care clasă este mai omogenă? (*are dispersia mai mică*)

Soluție

a) Reprezentarea histogramei	1p
b) $\bar{x}_1 = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{180}{24} = 7,5$	1p
$\bar{x}_2 = \frac{185}{25} = 7,4$, prima clasă este mai bună	1p
c) $\sigma_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{66}{24} = 2,75$	2p
$\sigma_2^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_2)^2 n_i}{\sum n_i} = \frac{36}{25} = 1,44$, a doua clasă este mai omogenă	2p

SUBIECTUL IV

Un profesor a corectat la examenul de bacalaureat 50 de lucrări . Făcând media notelor , a obținut 5,42 . Un coleg i-a atras atenția că nu a adunat punctul acordat din oficiu la fiecare lucrare . Ce medie va obține la lucrări după acordarea aceluia punct?

Soluție

Notăm S suma notelor	3p
Media notelor $\bar{x} = \frac{S}{50} = 5,42 \Rightarrow S = 271$	
Noua medie $\bar{x}' = \frac{S + 50}{50} = 6,42$	4p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 25 februarie 2019

T1

CLASA A XII-A

Filiera tehnologică: profil tehnic-toate specializările profilului
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Pe Z definim legea de compoziție $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$ oricare ar fi $x, y \in Z$.

- Să se arate că există $p \in Z$ astfel încât $x \circ y = 2(x+3)(y+3) + p$.
- Stabiliți dacă există elemente simetrizabile din Z în raport cu legea dată.
- Determinați $x, y \in Z$ astfel încât $x \circ y = 21$ și $(2x) \circ y = 27$

a) Determină $p = -3$	1p
b) Determină elementul neutru $e = -\frac{5}{2}$	1p
Determină $x' = \frac{1}{4(x+3)} - 3, \forall x \in Z \setminus \{-3\}$ (sau $x' = \frac{-35-12x}{4(x+3)}, \forall x \in Z \setminus \{-3\}$)	1p
Impune condiția $x' \in Z$ și obține $x \in \emptyset$.	
c) Sistemul este echivalent cu $(x+3)(y+3) = 12$ și $(2x+3)(y+3) = 15$	1p
Cum $y = -3$ nu convine, obține $\frac{x+3}{2x+3} = \frac{12}{15}$	1p
sau observă $y+3 \in D_{15} \cap D_{12} = \{\pm 1, \pm 3\}$	1p
Deduce $x = 1, y = 0$.	

SUBIECTUL II

Se consideră mulțimea $G = \{A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix}, x > -1\}$.

- Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor de ordinul doi.
- Demonstrați că nu există $A(m) \in G$ astfel încât $A(x)A(m) = A(m), \forall A(x) \in G$.
- Știind că G împreună cu "+", operația de înmulțire a matricelor de ordinul doi, este grup, arătați că funcția $f: G \rightarrow (-1, \infty), f(A(x)) = \ln(x+1)$ este un morfism de la la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $((-1, \infty), +)$, unde "+" este operația de adunare a numerelor reale.

a) Demonstrează $A(x)A(y) = A(x+y+xy), \forall A(x), A(y) \in G$	2p
Demonstrează $x+y+xy > -1, \forall x, y \in (-1, \infty)$, de unde concluzia.	1p
b) $A(x)A(m) = A(m), \forall A(x) \in G \Leftrightarrow A(x+m+xm) = A(m)$	1p
$\Rightarrow m = -1$. Cum $A(-1) \notin G$, deduce concluzia.	1p
c) f morfism al grupurilor $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$	1p
$\Leftrightarrow f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) + f(A(y)), \forall A(x), A(y) \in G$	1p
$\Leftrightarrow f(A(x+y+xy)) = \ln(x+1) + \ln(y+1) \Leftrightarrow \ln(x+y+xy+1) = \ln(x+1) + \ln(y+1)$	

SUBIECTUL III

Fie $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$. a) Arătați că f e o primitivă a funcției g .

b) Calculați $\int f''(x) \cdot g(x) dx$, $x \in (0, \infty)$ c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{x-1}$.

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$. De unde $f' = g$.	1p 1p
b) $\int f''(x) \cdot g(x) dx = \int g'(x) \cdot g(x) dx$ $= \frac{g^2(x)}{2} + C$	1p 1p
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$, unde F este o primitivă a funcției f $= F'(1) = f(1) = 1$ $= f(1) = 1$ (sau calculează integrala 1p, apoi limita -2p)	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

Fie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x-1)^n$.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f_3 este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați o primitivă a funcției f_{2018} cu proprietatea că $F(0) = \frac{2018}{2019}$ c) Calculați $\int x f_{2019}(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Fie F o primitivă a funcției f_3 . $\Rightarrow F'(x) = f_3(x), \forall x \in \mathbb{R}$. De unde $F''(x) = f_3'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = 3(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow F''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde F convexă pe $\mathbb{R}$.	1p 1p 1p
b) $\int f_{2018}(x) dx = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + C$. De unde rezultă că o primitivă a funcției f este de forma $F(x) = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + c, \forall x \in \mathbb{R}$ Obține $c = 1$ și $F(x) = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + 1, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.	1p 1p
c) $\int x(x-1)^{2019} dx = \int (x-1+1)(x-1)^{2019} dx = \int (x-1)^{2020} dx + \int (x-1)^{2019} dx$ $= \frac{(x-1)^{2021}}{2021} + \frac{(x-1)^{2020}}{2020} + C$ Sau aplică metoda integrării prin părți și obține $\frac{x(x-1)^{2020}}{2020} - \frac{(x-1)^{2021}}{2020 \cdot 2021} + C$ (2p)	1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"
etapa locală – 25 februarie 2019

T2

CLASA A XII-A

Filiera tehnologică – Profil servicii, resurse naturale și protecția mediului
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Pe Z definim legea de compoziție $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$ oricare ar fi $x, y \in Z$.

- a) Să se arate că există $p \in Z$ astfel încât $x \circ y = 2(x+3)(y+3) + p$.
 b) Stabiliți dacă există elemente simetrizabile din Z în raport cu legea dată.
 c) Determinați $x, y \in Z$ astfel încât $x \circ y = 21$ și $(2x) \circ y = 27$

a) Determină $p = -3$	1p
b) Determină elementul neutru $e = -\frac{5}{2}$ Determină $x' = \frac{1}{4(x+3)} - 3, \forall x \in Z \setminus \{-3\}$ (sau $x' = \frac{-35-12x}{4(x+3)}, \forall x \in Z \setminus \{-3\}$) Impune condiția $x' \in Z$ și obține $x \in \emptyset$.	1p 1p 1p
c) Sistemul este echivalent cu $(x+3)(y+3) = 12$ și $(2x+3)(y+3) = 15$ Cum $y = -3$ nu convine, obține $\frac{x+3}{2x+3} = \frac{12}{15}$ sau observă $y+3 \in D_{15} \cap D_{12} = \{\pm 1, \pm 3\}$ Deduce $x = 1, y = 0$.	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră mulțimea $G = \{A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix}, x > -1\}$.

- a) Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor de ordinul doi.
 b) Demonstrați că nu există $A(m) \in G$ astfel încât $A(x)A(m) = A(m), \forall A(x) \in G$.
 c) Știind că G împreună cu $"\cdot"$, operația de înmulțire a matricelor de ordinul doi, este grup, arătați că funcția $f: G \rightarrow (-1, \infty), f(A(x)) = \ln(x+1)$ este un morfism de la la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $((-1, \infty), +)$, unde $"+"$ este operația de adunare a numerelor reale.

a) Demonstrează $A(x)A(y) = A(x+y+xy), \forall A(x), A(y) \in G$ Demonstrează $x+y+xy > -1, \forall x, y \in (-1, \infty)$, de unde concluzia.	2p 1p
b) $A(x)A(m) = A(m), \forall A(x) \in G \Leftrightarrow A(x+m+xm) = A(m)$ $\Rightarrow m = -1$. Cum $A(-1) \notin G$, deduce concluzia.	1p 1p
c) f morfism al grupurilor $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ $\Leftrightarrow f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) + f(A(y)), \forall A(x), A(y) \in G$. $\Leftrightarrow f(A(x+y+xy)) = \ln(x+1) + \ln(y+1) \Leftrightarrow \ln(x+y+xy+1) = \ln(x+y+xy+1)$	1p 1p

SUBIECTUL III

Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$. a) Arătați că f e o primitivă a funcției g .

b) Calculați $\int f''(x) \cdot g(x) dx$, $x \in (0, \infty)$ c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{x-1}$.

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$. De unde $f' = g$.	1p 1p
b) $\int f''(x) \cdot g(x) dx = \int g'(x) \cdot g(x) dx$ $= \frac{g^2(x)}{2} + C$	1p 1p
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$, unde F este o primitivă a funcției f $= F'(1) = f(1) = 1$ $= f(1) = 1$ (sau calculează inegrala 1p, apoi limita -2p)	1p 1p 1p

SUBIECTUL IV

Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x-1)^n$.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f_3 este convexă pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați o primitivă a funcției f_{2018} cu proprietatea că $F(0) = \frac{2018}{2019}$ c) Calculați $\int x f_{2019}(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Fie F o primitivă a funcției f_3 . $\Rightarrow F'(x) = f_3(x), \forall x \in \mathbb{R}$. De unde $F''(x) = f_3'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = 3(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow F''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde F convexă pe $\mathbb{R}$.	1p 1p 1p
b) $\int f_{2018}(x) dx = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + C$. De unde rezultă că o primitivă a funcției f este de forma $F(x) = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + c, \forall x \in \mathbb{R}$ Obține $c = 1$ și $F(x) = \frac{(x-1)^{2019}}{2019} + 1, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.	1p 1p
c) $\int x(x-1)^{2019} dx = \int (x-1+1)(x-1)^{2019} dx = \int (x-1)^{2020} dx + \int (x-1)^{2019} dx$ $= \frac{(x-1)^{2021}}{2021} + \frac{(x-1)^{2020}}{2020} + C$ Sau aplică metoda integrării prin părți Și obține $\frac{x(x-1)^{2020}}{2020} - \frac{(x-1)^{2021}}{2020 \cdot 2021} + C$ (2p)	1p 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

"ADOLF HAIMOVICI"

etapa locală – 25 februarie 2019

CLASA A XII-A

T3

Filiera teoretică – Profilul real – Specializarea Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

Pe R definim legea de compoziție $x \circ y = 2xy + 6x + 6y + 15$ oricare ar fi $x, y \in R$.

- a) Să se arate că există $p \in R$ astfel încât $x \circ y = 2(x+3)(y+3) + p$.
- b) Determinați $x, y \in R$ astfel încât $x \circ y = 21$ și $(2x) \circ y = 27$
- c) Determinați $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

a) Determină $p = -3$	1p
b) Sistemul este echivalent cu $(x+3)(y+3) = 12$ și $(2x+3)(y+3) = 15$	1p
Cum $y = -3$ nu convine obține $\frac{x+3}{2x+3} = \frac{12}{15}$	1p
Deduce $x = 1, y = 0$.	1p
c) $a \circ b = 2(a+3)(b+3) - 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(a+3)(b+3) \in \mathbb{Z}$	1p
Furnizează un exemplu corect	2p

SUBIECTUL II

Se consideră mulțimea: $G = \{A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = I_2 + xB, x \in \mathbb{R} > -1\}$ unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și operația

de înmulțire a matricelor de ordinul doi.

- a) Arătați G este parte stabilă a $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor de ordinul doi.
- b) Știind că G împreună cu " $\cdot$ ", operația de înmulțire a matricelor de ordinul doi, este grup, arătați că funcția $f: G \rightarrow (-1, \infty)$, $f(A(x)) = \ln(x+1)$ este un izomorfism de la la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $((-1, \infty), +)$, unde "+" este operația de adunare a numerelor reale.
- c) Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2019)$.

a) Demonstrează $A(x)A(y) = A(x+y+xy), \forall A(x), A(y) \in G$	1p
Demonstrează $x+y+xy > -1, \forall x, y \in (-1, \infty)$, de unde concluzia.	1p
b) f morfism al grupurilor $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$	1p
$\Leftrightarrow f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) + f(A(y)), \forall A(x), A(y) \in G.$	1p
$\Leftrightarrow f(A(x+y+xy)) = \ln(x+1) + \ln(y+1) \Leftrightarrow \ln(x+y+xy+1) = \ln(x+y+xy+1)$	1p
Justifică f bijectivă	
c) $f(A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2019)) = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln 2020$	1p
$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2019) = f^{-1}(\ln(2020!)) = 2020! - 1$	1p

SUBIECTUL III

Fie $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$. a) Arătați că $\int g(x) dx = f(x) + C$, $x \in (0, \infty)$.

- b) Calculați $\int f(g(x))f''(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.
- c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f^2(t) dt}{x-1}$.

a) Demonstrează $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = g(x), x \in (0, \infty)$. De unde $\int g(x) dx = f(x) + C, x \in (0, \infty)$ (Sau demonstrează prin calcul direct egalitatea-2p)	1p 1p
b) $\int f(g(x))f''(x)dx = \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, unde F este o primitivă a funcției f. Cum $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \ln x - x + C$ Finalizează și obține $\int f(g(x))f''(x)dx = \frac{2}{3}g^{\frac{3}{2}}(x) + g(x)\ln g(x) - g(x) + C =$ $= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{2x}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{x}+2}{2x}\right)\ln\left(\frac{\sqrt{x}+2}{2x}\right) - \left(\frac{\sqrt{x}+2}{2x}\right) + C$	1p 1p 1p
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f^2(t)dt}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$, unde F este o primitivă a funcției f^2 $= F'(1) = f^2(1) = 1$	1p 1p

SUBIECTUL IV

Fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (2x-1)^n$.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f_{2019} este convexă. b) Calculați $\int x f_{2019}(x) dx, x \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $\int \frac{1}{x\sqrt{1+xf_1(x)}} dx, x \in (0, \infty)$.

a) Fie F o primitivă a funcției f_{2019}. $\Rightarrow F'(x) = f_{2019}(x), \forall x \in \mathbb{R}$. De unde $F''(x) = f'_{2019}(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = 2019 \cdot 2 \cdot (2x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow F''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde F convexă pe $\mathbb{R}$.	1p 1p 1p
b) $\int x f_{2019}(x) dx = \int x(2x-1)^{2019} dx = \frac{1}{2} \int [(2x-1)^{2020} + (2x-1)^{2019}] dx$ $\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{(2x-1)^{2021}}{2021} + \frac{(2x-1)^{2020}}{2020} \right]$. (sau aplică metoda integrării prin părți și obține $\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2x(2x-1)^{2020}}{2020} - \frac{(2x-1)^{2021}}{2020 \cdot 2021} \right]$ -2p)	1p 1p
c) $\int \frac{1}{x\sqrt{1+xf_1(x)}} dx = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} dx = - \int \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}} dx$ $= - \ln \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \right] + C$	1p 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI" etapă
locală – 25 februarie 2019
CLASA A XII-A**

T4

**Filiera teoretică, profil uman
BAREM DE CORECTARE**

SUBIECTUL I

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. a) Calculați A^2 , A^3 . b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $A^n = I_2$.

c) Calculați $A + A^2 + \dots + A^{2019}$

a) Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Determină $A^3 = -I_2$	1p
b) $A^3 = -I_2 \Rightarrow A^4 = -A$, $A^5 = A^2$, $A^6 = I_2 \Rightarrow$ Cel mai mic număr natural cu proprietatea cerută este $n = 6$	1p 1p
c) $A + A^2 + \dots + A^{2019} = 336(A + A^2 + \dots + A^6) + A + A^2 + A^3$ $= 336O_2 + A + A^2 + A^3$ finalizare	1p 1p 1p

SUBIECTUL II

a) Demonstrează $A(x)A(y) = A(x + y + xy)$, $\forall A(x), A(y) \in G$ Demonstrează $x + y + xy > -1$, $\forall x, y \in (-1, \infty)$, de unde concluzia.	2p 1p
b) $A(x)A(m) = A(m)$, $\forall A(x) \in G \Leftrightarrow A(x + m + xm) = A(m)$ $\Rightarrow m = -1$. Cum $A(-1) \notin G$, deduce concluzia.	1p 1p
c) f morfism al grupurilor $(G, \cdot)$ și $(\mathbf{R}, +)$ $\Leftrightarrow f(A(x) \cdot A(y)) = f(A(x)) + f(A(y))$, $\forall A(x), A(y) \in G$. $\Leftrightarrow f(A(x + y + xy)) = \ln(x + 1) + \ln(y + 1) \Leftrightarrow \ln(x + y + xy + 1) = \ln(x + y + xy + 1)$	1p 1p

SUBIECTUL II

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ și mulțimea $\mathbf{C}(A) = \{X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \mid AX = XA\}$.

a) Demonstrați că matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}(A)$.

b) Demonstrați că dacă $X \in \mathbf{C}(A)$ atunci există numerele reale a, b astfel încât $X = (a + b) \cdot I_2 - b \cdot A$.

c) Determinați matricele $X \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ cu proprietatea că $X^{2019} = A$.

a) Arată $AB = BA$	1p
b) $X \in C(A) \Rightarrow AX = XA, X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a-2c & 2b-2d \end{pmatrix}$ $XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & -a-2b \\ c+2d & -c-2d \end{pmatrix}$ $\Rightarrow c = -2b, d = a+3b$ Arată $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+3b \end{pmatrix} = (a+b)I_2 - bA$	1p 1p 1p 1p
c) Arată că $XA = AX \Rightarrow X \in C(A) \stackrel{(b)}{\Rightarrow} X = (a+b)I_2 - bA$ și $\det(X^{2019}) = \det A = 0 \Rightarrow \det X = 0$ Din relația lui Hamilton - Cayley avem $X^2 = (\text{tr} X) \cdot X = (a+b) \cdot X$ $\Rightarrow X^{2019} = (a+b)^{2018} X \Rightarrow (a+b)^{2018} X = A$ $\Rightarrow a = -b \Rightarrow X = -bA$ $X^{2019} = -b^{2019} A \Rightarrow b = -1, a = 1$ și $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea: $G = \{A(x) \in M_2(R) \mid A(x) = I_2 + xB, x \in R > -1\}$ unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și

operația de înmulțire a matricelor de ordinul doi.

a) Arătați $A(x) \cdot A(y) \in G, \forall A(x), A(y) \in G$.

b) Determinați matricea $A^n(x), n \in N^*$

c) Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(10)$.

a) Demonstrează $A(x)A(y) = A(x+y+xy), \forall A(x), A(y) \in G$ Demonstrează $x+y+xy > -1, \forall x, y \in (-1, \infty)$, de unde concluzia.	1p 1p
b) $A^n(x) = (I_2 + xB)^n$ și dezvoltă Cum $B^2 = B \Rightarrow B^n = B, \forall n \in N^*$, deduce $A^n(x) = I_2 + [(x+1)^n - 1]B$	1p 1p 1p
c) $A(x)A(y) = A((x+1)(y+1)-1), \forall A(x), A(y) \in G$ De unde $A(1)A(2) = A(10-1) = A(9)$	1p 1p

SUBIECTUL IV

Să se rezolve în $M_2(R)$ sistemul:

$$\begin{cases} X \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ X + Y \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} -X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - Y = -\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$	1p
De unde obține prin adunarea ecuațiilor, $Y\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	2p
Determină matricea $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	2p
Determină matricea $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	2p