



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2023

BAREM clasa a VI-a

Problema 1. Determinați numerele naturale x și y care verifică egalitatea $\frac{x+2}{2} - \frac{3}{y+1} = 5$

Soluție

$$\frac{x+2}{2} = \frac{3}{y+1} + 5, \quad x, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x+2 = \frac{6}{y+1} + 10 \dots\dots\dots 1p$$

$$x = \frac{6}{y+1} + 8, \quad x, y \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y+1 \in D_6 \dots\dots\dots 2p$$

Analizăm: $y=0 \Rightarrow x=14$; $y=1 \Rightarrow x=11$; $y=2 \Rightarrow x=10$; $y=5 \Rightarrow x=9$. $\dots\dots\dots 4p$

Problema 2. În jurul punctului O considerăm unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOF$ și $\sphericalangle FOA$, astfel încât $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOE$ sunt opuse la vârf, măsurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 5 și 7, iar măsurile $\sphericalangle EOF$ și $\sphericalangle FOA$ sunt invers proporționale cu numerele 3 și 5.

a) Demonstrați că $OB \perp OF$.

b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului EOC , demonstrați că $\sphericalangle EOM \equiv \sphericalangle BOC$.

Soluție

a) Dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle DOE$ sunt opuse la vârf, obținem $\sphericalangle AOD = 180^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$\frac{\sphericalangle AOB}{3} = \frac{\sphericalangle BOC}{5} = \frac{\sphericalangle COD}{7} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sphericalangle AOB = 36^\circ, \sphericalangle BOC = 60^\circ, \sphericalangle COD = 84^\circ \text{ și } \sphericalangle DOE = 36^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\sphericalangle AOE = 144^\circ \text{ și } \sphericalangle EOF \cdot 5 = \sphericalangle FOA \cdot 3 \Rightarrow \sphericalangle EOF = 90^\circ \text{ și } \sphericalangle FOB = 54^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Deci $\sphericalangle FOB = 90^\circ \Rightarrow OB \perp OF \dots\dots\dots 1p$

b) $\sphericalangle EOC = 120^\circ$, OM este bisectoarea unghiului $EOC \Rightarrow \sphericalangle EOM = \sphericalangle MOC = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$

$$\sphericalangle EOM \equiv \sphericalangle BOC \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. Fie n un număr natural astfel încât punctele $A, A_1, A_2, \dots, A_n, B$ sunt coliniare în această ordine, iar lungimile segmentelor $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_nB$ se exprimă prin numerele naturale distincte care formează mulțimea divizorilor naturali ai lui 2023.

a) Determinați valoarea lui n .

b) Arătați că lungimea segmentului AB este mai mică decât 2500.

Soluție



a) $\{AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n, A_nB\} = D_{2023}$

$2023 = 7 \cdot 17^2$ 2p

Nr. 2023 are 6 divizori $\Rightarrow n=5$1p

b) $D_{2023} = \{1, 7, 17, 7 \cdot 17, 17^2, 7 \cdot 17^2\}$ 1p

$S = 1 + 7 + 17 + 7 \cdot 17 + 17^2 + 7 \cdot 17^2 = 2456$ 2p

$AB = S < 2500$1p

Problema 4.

a) Determinați perechile de numere naturale (a, b) care verifică relația $a^2 + b^2 = 293$.

b) Determinați toate tripletele (x, y, z) de numere naturale care verifică relația:
 $x^2 + y^2 + 2022z^2 = 2023$.

Soluție

a) $U(k^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, $a^2 + b^2 = 293 \Rightarrow \{u(a^2), u(b^2)\} = \{4, 9\}$ 1p

Soluțiile ecuației $a^2 + b^2 = 293$, $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow (a, b) = (2, 17); (17, 2)$1p

b) Cum $2022z^2 \leq 2023$, $z \in \mathbb{N} \Rightarrow z \in \{0, 1\}$ 1p

Dacă $z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 1); (0, 1, 1)$ 1p

Dacă $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2023$ (1)

Pătratele perfecte sunt de forma M_4 , $M_4 + 1$, deci $x^2 + y^2 \in \{M_4, M_4 + 1, M_4 + 2\}$ 2p

Dar $2023 = M_4 + 3$, deci ecuația (1) nu are soluții naturale1p