



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală

18 februarie 2017

Clasa a VI-a

1. Găsiți cifrele nenule a, b, c , astfel încât:

$$22,5 \cdot [\overline{a, b(c)} - \overline{a, c} + \overline{b, c(a)} - \overline{b, a} + \overline{c, a(b)} - \overline{c, b}] = 1.$$

2. 1. Să se arate că orice putere naturală a lui 10 se descompune în suma a două pătrate.

2. 2. Fie numărul natural $n_k = 10^k \cdot (9 \cdot k + 1) + 8$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că n_k este multiplu de 9.

b) Să se calculeze n_{2017} .

3. Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, \dots, M_{2017}$, astfel încât

$$AM_1 = \frac{1}{2}AB, AM_2 = \frac{1}{2}AM_1, AM_3 = \frac{1}{2}AM_2, \dots, AM_{2017} = \frac{1}{2}AM_{2016}.$$

a) Exprimați $AM_1, AM_2, AM_3, \dots, AM_{2017}$ cu ajutorul lui AB .

b) Calculați suma $S = (AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_{2017}) + 1$, știind că $AB = 2^{2017}$.

c) Se consideră fracția: $F = \frac{6 \cdot AM_2}{5 \cdot AM_1}$. Aflați câte numere naturale sunt în mulțimea: $M = \{F, 2 \cdot F, 3 \cdot F, \dots, 2017 \cdot F\}$.

4. Pe laturile $[AB], [AC]$ ale triunghiului oarecare ABC se construiesc în exteriorul triunghiului ABC triunghiurile echilaterale ABM , respectiv ACN . Pe latura $[BC]$, de aceeași parte cu A , se construiește triunghiul echilateral BCP . Să se arate că: $[AM] \equiv [PN]$ și $[AN] \equiv [PM]$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 2 ore.

Soluții și bareme orientative
Clasa a VI-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

$$1. \overline{a, b(c)} = a + \frac{\overline{bc} - b}{90}, \overline{a, c} = \frac{\overline{ac}}{10}, \overline{b, c(a)} = b + \frac{\overline{ca} - a}{90}, \overline{b, a} = \frac{\overline{ba}}{10}, \overline{c, a(b)} = c + \frac{\overline{ab} - b}{90}, \overline{c, b} = \frac{\overline{cb}}{10}. \quad (1p)$$

Arată că:

$$\overline{a, b(c)} - \overline{a, c} = a + \frac{\overline{bc} - b}{90} - \frac{\overline{ac}}{10} = \frac{90a}{90} + \frac{10b + c - b}{90} - \frac{90a + 9c}{90} = \frac{90a + 10b + c - b - 90a - 9c}{90} = \frac{9b - 8c}{90}; \quad (1p)$$

$$\overline{b, c(a)} - \overline{b, a} = \frac{9c - 8a}{90}, \quad (1p)$$

$$\overline{c, a(b)} - \overline{c, b} = \frac{9a - 8b}{90}. \quad (1p)$$

$$\text{Ecuația devine: } \frac{225}{10} \cdot \left(\frac{9b - 8c}{90} + \frac{9c - 8a}{90} + \frac{9a - 8b}{90} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{225}{10} \cdot \frac{a + b + c}{90} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 4. \quad (2p)$$

$$\text{Din } \left. \begin{array}{l} a + b + c = 4 \\ a, b, c \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b, c) \in \{(1, 1, 2); (1, 2, 1); (2, 1, 1)\}. \quad (1p)$$

2. 1. Fie $(2n + 1)$ puterea lui 10, număr impar. Avem:

$$10^{2n+1} = 10 \cdot 10^{2n} = (1 + 9) \cdot 10^{2n} = (10^n)^2 + (3 \cdot 10^n)^2. \quad (1p)$$

Fie $(2n)$ puterea lui 10, număr par. Avem:

$$10^{2n} = 10^{2n} = 10^{2n-2}(36 + 64) = (6 \cdot 10^{n-1})^2 + (8 \cdot 10^{n-1})^2. \quad (1p)$$

2. 2. a) Avem succesiv:

$$\begin{aligned} n_k &= 9k \cdot 10^k + 10^k + 8 = 9k \cdot 10^k + 10^k - 1 + 9 = 9k \cdot 10^k + 9 + \underbrace{99 \dots 999}_{\text{de } k \text{ ori}} = \\ &= 9 \cdot \left(k \cdot 10^k + 1 + \underbrace{11 \dots 111}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) = 9 \cdot \left(k \cdot 10^k + \underbrace{11 \dots 112}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} \right). \end{aligned} \quad (3p)$$

b)

$$n_{2017} = 9 \cdot \left(\underbrace{2017 \underbrace{00 \dots 000}_{\text{de } 2017 \text{ ori}}} + \underbrace{11 \dots 112}_{\text{de } 2016 \text{ ori}} \right) = 9 \cdot 2017 \underbrace{11 \dots 112}_{\text{de } 2016 \text{ ori}} = 18154 \underbrace{00 \dots 008}_{\text{de } 2016 \text{ ori}}. \quad (2p)$$

$$3. a) \text{ Avem: } AM_1 = \frac{1}{2}AB, AM_2 = \frac{1}{2}AM_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2^2}AB, AM_3 = \frac{1}{2}AM_2 = \frac{1}{2^3}AB, \dots, AM_{2017} = \frac{1}{2}AM_{2016} = \frac{1}{2^{2017}}AB. \text{ În general } AM_k = \frac{1}{2^k}AB, \forall k = \overline{1, 2017}. \quad (1p)$$

b) Întrucât $AM_k = \frac{1}{2^k}AB, \forall k = \overline{1, 2017} \Rightarrow$ suma S devine:

$$S = (AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_{2017}) + 1 = \left(\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2^2}AB + \frac{1}{2^3}AB + \dots + \frac{1}{2^{2017}}AB \right) + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2017}} \right) \cdot AB + 1. \quad (1p)$$

Cum $AB = 2^{2017} \Rightarrow S = (2^{2016} + 2^{2015} + \dots + 2^2 + 2 + 1) + 1$. Notăm paranteza cu a și deci $a = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}$. Înmulțind cu 2, rezultă:

$$2 \cdot a = 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{2016} + 2^{2017}. \quad (2p)$$

Prin scădere, obținem:

$$2 \cdot a - a = (2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{2016} + 2^{2017}) - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2015} + 2^{2016}) \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 2^{2017} - 1. \text{ În concluzie: } S = (2^{2017} - 1) + 1 \Rightarrow S = 2^{2017}. \quad (1p)$$

c) Prin simplificare, $F = \frac{6 \cdot AM_2}{5 \cdot AM_1} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} AM_1}{5 \cdot AM_1} = \frac{3}{5}$. Mulțimea M se mai scrie:

$$M = \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2 \cdot 3}{5}, \frac{3 \cdot 3}{5}, \dots, \frac{2017 \cdot 3}{5} \right\}. \quad (1p)$$

Numărul de numere naturale din M coincide cu numărul multiplilor lui 5 din mulțimea $\{1, 2, \dots, 2017\}$, adică:

$$1 \leq 5k \leq 2017, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{5} \leq k \leq \frac{2017}{5} = 403 \frac{2}{5} \Rightarrow k \in \{1, 2, \dots, 403\}. \text{ Mulțimea } M \text{ are } 403 \\ \text{elemente care sunt din } \mathbb{N} \text{ din cele } 2017 \text{ elemente ale lui } M. \quad (1p)$$

4. $\triangle MBP \equiv \triangle ABC$, deoarece $[BM] \equiv [AB]$, $[BP] \equiv [BC]$ și

$$m(\widehat{MBP}) = 60^\circ + m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{ABC}). \quad (2p)$$

Din congruența triunghiurilor MBP și ABC , rezultă: $[MP] \equiv [AC] \equiv [AN]$. (1p)

$\triangle NPC \equiv \triangle ACB$, deoarece $m(\widehat{PCN}) = m(\widehat{ACB})$, $[NC] \equiv [AC]$ și $[PC] \equiv [BC]$. (2p)

$\triangle NPC \equiv \triangle ACB \Rightarrow [PN] \equiv [AB]$, $[AB] \equiv [MA]$. Deci $[AM] \equiv [PN]$. (2p)

