

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

HUNEDOARA

ETAPA LOCALĂ

CLASA a V-a

1. a) $A = 10 \cdot (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}+10)$

$$A+B = 10 \cdot (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}+10) + (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}+10) \quad \mathbf{1p}$$

$$A+B = (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}) \cdot (10+3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}) = (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}+10)^2 \quad \mathbf{2p}$$

b) $A = 2 \cdot 5 \cdot (3+3^2+3^3+\dots+3^{2018}+1+9) = 5 \cdot [2 \cdot (1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2018})+18]$

$$A = 5 \cdot (3^{2019} - 1 + 18) = 5 \cdot (3^{2019} + 17) \quad \mathbf{2p}$$

$$5 \cdot 3^{2019} + 5 \cdot 17 < 5 \cdot 3^{2019} + 4 \cdot 3^{2019} = 9 \cdot 3^{2019} = 3^{2021} \quad A < 3^{2021} \quad \mathbf{2p}$$

2. $M = 4^n \cdot 4 \cdot 9^n \cdot 9^2 - 6^{2n} \cdot 6 \cdot 9 - 2^{2n} \cdot 9^n \cdot 9 \quad \mathbf{2p}$

$$M = 36^n \cdot 4 \cdot 81 - 36^n \cdot 6 \cdot 9 - 36^n \cdot 9 \quad \mathbf{3p}$$

$$M = 36^n \cdot 9 \cdot (36 - 6 - 1) = 36^n \cdot 9 \cdot 29 = 36^n \cdot 261 : 261, \text{ pentru orice } n \text{ număr natural.} \quad \mathbf{2p}$$

3. $n = 2003 \cdot c + r, \quad r < 2003 \quad \mathbf{1p}$

$$r \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2002\}$$

$$n = 2003 \cdot r + r \Rightarrow n = 2004 \cdot r \quad \mathbf{1p}$$

$$S = 2004 \cdot 0 + 2004 \cdot 1 + 2004 \cdot 2 + 2004 \cdot 3 + \dots + 2004 \cdot 2002 \quad \mathbf{1p}$$

$$S = 2004 \cdot (1+2+3+\dots+2002) \quad \mathbf{1p}$$

$$S = 2004 \cdot [(2002 \cdot 2003) : 2] \quad \mathbf{2p}$$

$$2S = 2002 \cdot 2003 \cdot 2004 \quad \mathbf{1p}$$

4. $\overline{xy} \cdot (2x+y-z) = 75$

Avem cazurile:

a) $\overline{xy} = 75 \Rightarrow x=7, y=5, z=18 \text{ (fals)} \quad \mathbf{3p}$
 $2x+y-z = 1$

b) $\overline{xy} = 25 \Rightarrow x=2, y=5, z=6 \text{ (adevărat)} \quad \mathbf{2p}$
 $2x+y-z = 3$

c) $\overline{xy} = 15 \Rightarrow x=1, y=5, z=2 \text{ (adevărat)} \quad \mathbf{2p}$
 $2x+y-z = 5$

Notă: Orice altă rezolvare corectă se va puncta corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică

Hunedoara

Etapa locală- 15februarie 2018

Clasaa VI-a – Barem de corectare

1. a) Mulțimea A are 6055 elemente..... 1p

Suma elementelor din mulțimea A este: $S = \frac{6055a + 3027 \cdot 6055}{2018}$ 1p

Media aritmetică a elementelor mulțimii A este $\frac{S}{6055} = \frac{a + 3027}{2018} > 1$ 1p

Cel mai mic $a \in \mathbb{N}$ pentru care $\frac{a + 3027}{2018} \in \mathbb{N}$ se obține din $\frac{a + 3027}{2018} = 2$

$\Rightarrow a = 1009$ 1p

b) $\frac{a + 6054}{2018} = \frac{a + 3 \cdot 2018}{2018}$. Se obține $a = 2018$ 3p

2. Dacă $a=0$, se obține: $p^2 + 3^p = 36$, de unde $p=3$ 3p

Dacă $a \neq 0$, $4^a : 4 \Rightarrow u(37^{4^a}) = 1 \Rightarrow u(p^2 + 3^p) = 0$ 1p

Cum p este număr prim, are una din formele: $4k+1$ sau $4k+3$, $k \in \mathbb{N}^*$ 1p

Dacă $p=4k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ atunci $u(3^p) = 3$, prin urmare $u(p^2) = 7$, imposibil..... 1p

Dacă $p=4k+3$, $k \in \mathbb{N}^*$ atunci $u(3^p) = 7$, prin urmare $u(p^2) = 3$, imposibil..... 1p

3. a) $AE = \frac{2}{3} \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AB}{4} \Rightarrow AE = BC = \frac{AB}{4} \Rightarrow [AE] \equiv [BC]$ 3p

b) Fie M mijlocul segmentului CE $\Rightarrow EM = MC$ 1p

$AM = AE + EM$, $MB = BC + MC$, de unde $AM=MB$,

deci M mijlocul segmentului AB..... 3p

4. a) Semidreptele roșii împart unghiul AOB în 30 de unghiuri congruente, fiecare având măsura de 5° , iar semidreptele verzi împart unghiul AOB în 25 de unghiuri congruente, fiecare având măsura de 6° 1p

Patru semidrepte verzi se suprapun peste cele roșii(de exemplu când formează cu [OA unghiuride $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$)..... 3p

b) În interiorul unghiului AOR_6 sunt două unghiuri de 1° .

În total $2 \cdot 5 = 10$ unghiuri de 1° 3p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
HUNEDOARA
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VII-a

Barem orientativ de notare

Subiectul I

Determinați numerele naturale nenule a și b astfel încât

$$ab + b + 2018 = ab^2$$

Soluție și barem:

$$\Leftrightarrow ab^2 - ab - b = 2018 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow ab(b-1) - (b-1) = 2019 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow (ab-1)(b-1) = 2019 \quad (1p)$$

$$b-1 \mid 2019 \Leftrightarrow b-1 \in \{1, 3, 673, 2019\} \quad (1p)$$

$$ab-1 \geq b-1 \Rightarrow \text{convine doar } b-1 \in \{1, 3\}. \quad (1p)$$

Dacă $b=2$, rezultă $a=1010$.

Dacă $b=4$, rezultă $4a-1=673$, ecuație care nu are soluție naturală. **(1p)**

Prin urmare, $a=1010$ și $b=2$. **(1p)**

Subiectul II

Soluție și barem:

a) Presupunând contrariul, avem: $k! + (k+1)! > (k+2)!$ (inegalitatea triunghiului) **(1p)**

$$\Leftrightarrow k!(1+k+1) > k!(k+1)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow 1 > k+1 \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow 0 > k, \text{ contradicție. } (1p)$$

b) Oricare ar fi k număr natural, $k \geq 5$, ultima cifră a lui $k!$ este 0, deoarece produsul $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ îi conține ca factori pe 2 și pe 5. **(1p)**

Așadar, pentru $n \geq 4$, ultima cifră a sumei $S = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$ este 3, deoarece $1!+2!+3!+4! = 1+2+6+24=33$. **(1p)**

Prin urmare, pentru $n \geq 4$ rezultă că S nu este pătrat perfect, deci a nu este număr natural.

$$\text{Pentru } n=3 \Rightarrow a = \sqrt{1!+2!+3!} = \sqrt{1+2+6} = 3 \in \mathbb{N}.$$

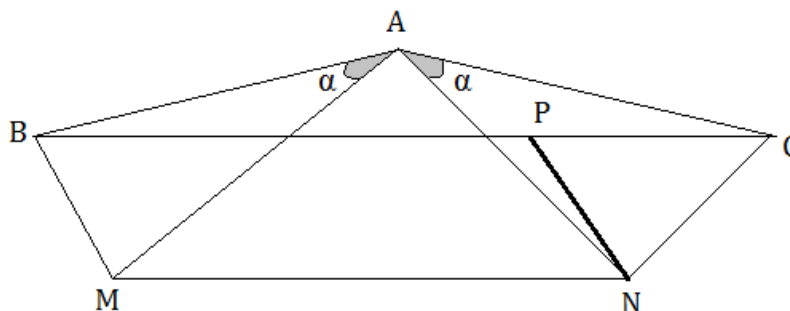
$$\text{Pentru } n=2 \Rightarrow a = \sqrt{1!+2!} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \notin \mathbb{N}.$$

$$\text{Pentru } n=1 \Rightarrow a = \sqrt{1!} = 1 \in \mathbb{N}. \quad (1p)$$

Așadar $n \in \{1, 3\}$. **(1p)**

Subiectul III

Soluție:



Se observă că $m(\angle BAN) + m(\angle MAC) = 240^\circ > 180^\circ$,

deci punctul M este în interiorul $\angle BAN$. (1 p)

$$\text{Așadar } m(\angle BAM) = m(\angle CAN) = m(\angle BAC) - 120^\circ = \alpha$$

În triunghiul isoscel $\triangle ANC$ avem $m(\angle ANC) = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, iar în triunghiul isoscel $\triangle AMN$ avem

$$m(\angle ANM) = \frac{180^0 - (120^0 - \alpha)}{2}. \quad (1p)$$

Însumând cele două relații, obținem $m(\angle CNM) = 120^0$. Analog $m(\angle BMN) = 120^0$. **(1p)**

$\triangle BAM \equiv \triangle CAN$ (LUL), deci $[BM] \equiv [CN]$.

Din $\triangle BMN \equiv \triangle CNM$ (LUL) avem $[BN] \equiv [CM]$, de unde rezultă că $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$ (LLL).

Prin urmare $\angle MBC \equiv \angle NCB$, deci, folosind suma măsurilor unghiurilor patrulaterului BMNC, rezultă că $m(\angle MBC) = m(\angle NCB) = 60^0$, BMNC fiind un trapez isoscel. **(1p)**

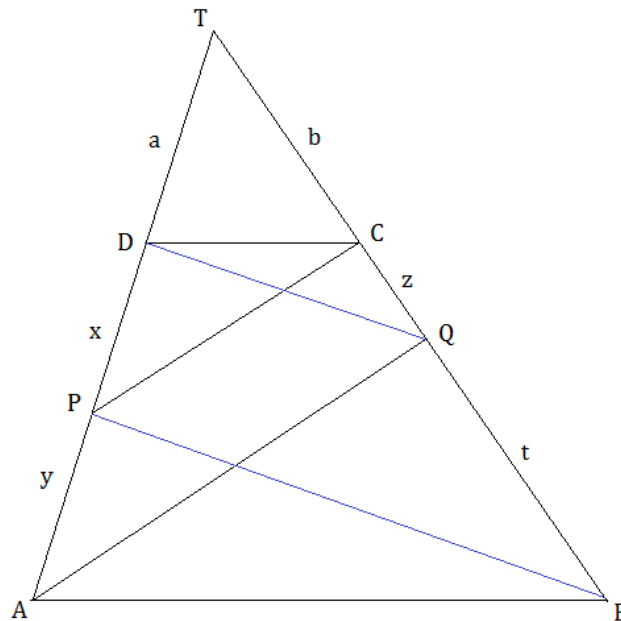
Ducem prin N o paralelă la BM, care intersectează (BC) în punctul P. **(1p)**

Triunghiul $\triangle PNC$ este isoscel ($PN = BM = CN$) cu un unghi de 60^0 , deci este echilateral. **(1p)**

Așadar $BM = PC$ și $MN = BP$, deci $BM + MN = PC + BP = BC$, q.e.d. .

Subiectul IV

Soluție și barem:



a) Notăm, ca în figură, $DT = a$, $DP = x$, $PA = y$, $CT = b$, $CQ = z$, $QB = t$.

$$\text{Avem } \frac{TP}{PA} > \frac{TC}{CQ} \Leftrightarrow \frac{a+x}{y} > \frac{b}{z} \Leftrightarrow az + xz > by \quad (1) \quad (1p)$$

$$\text{Din teorema lui Thales (} CD \parallel AB \text{) avem: } \frac{TD}{DA} = \frac{TC}{CB} \Leftrightarrow \frac{a}{x+y} = \frac{b}{z+t} \Leftrightarrow az + at = bx + by \quad (2) \quad (1p)$$

Din (1) și (2) rezultă : $(az + xz) - (az + at) > by - (bx + by)$ **(1p)**

$$\Leftrightarrow xz - at > -bx \Leftrightarrow xz + bx > at \Leftrightarrow x(b+z) > at \Leftrightarrow \frac{b+z}{t} > \frac{a}{x} \Leftrightarrow \frac{TQ}{QB} > \frac{TD}{PD}. \quad (1p)$$

b) Analog demonstrației de la a) se poate obține că: $\frac{TP}{PA} < \frac{TC}{CQ} \Rightarrow \frac{TQ}{QB} < \frac{TD}{PD}. \quad (1p)$

$$\text{Avem: } \frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} = \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD} \quad (3)$$

Dacă $\frac{TP}{PA} > \frac{TC}{CQ}$ rezultă $\frac{TQ}{QB} > \frac{TD}{PD}$ și însumând relațiile obținem $\frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} > \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD}$, contradicție.

Dacă $\frac{TP}{PA} < \frac{TC}{CQ}$ rezultă $\frac{TQ}{QB} < \frac{TD}{PD}$ și însumând relațiile obținem $\frac{TP}{PA} + \frac{TQ}{QB} < \frac{TC}{CQ} + \frac{TD}{PD}$, contradicție. **(1p)**

Prin urmare $\frac{TP}{PA} = \frac{TC}{CQ}$ și din (3) rezultă $\frac{TQ}{QB} = \frac{TD}{PD}$.

Din reciproca teoremei lui Thales rezultă apoi că $PC \parallel AQ$ și $DQ \parallel BP$. **(1p)**