



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

17 februarie 2018

Clasa a XII-a

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție " $*$ " astfel :

$$x * y = -xy + 2x + 2y - 2, (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

- Demonstrați că legea " $*$ " este asociativă .
- Determinați $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea : $a * x = x * a = a, (\forall)x \in \mathbb{R}$.
- Să se calculeze: $\frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \frac{3}{2018} * \dots * \frac{4036}{2018}$.

2. Fie G un grup multiplicativ cu 4 elemente, astfel încât $x^2 = e, (\forall)x \in G$, unde e este elementul neutru al grupului.

- Alcătuți tabla operației lui G și arătați că G este abelian.
- Demonstrați că: $(G, \cdot) \not\cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

3. Fie următorul șir de integrale nedefinite:

$$I_{m,n}(x) = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

- Calculați $I_{m,1}(x)$ cu $I_{m,1}(0) = 2018$
- Calculați $I_{1,n}(x)$ cu $I_{1,n}(0) = 0$
- Stabiliți o relație de recurență între termenii șirului $(I_{m,n}(x))_{m,n \in \mathbb{N}^*}$.

4. a) Să se calculeze: $\int \frac{1 - \sin x}{2 \sin x + 3 \cdot (1 + \cos x) \cdot e^x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Să se calculeze: $\int_0^3 \frac{(3-x)^{2016}}{(3+x)^{2018}} dx$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.