

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 17 februarie 2023

Clasa a XII-a

1. Pentru $k > 0$, definim mulţimea de matrice

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{k^2-x^2}} & \frac{k}{\sqrt{k^2-x^2}} \end{pmatrix}, x \in (-k, k) \right\}.$$

- (a) Determinaţi valorile lui $k \in (0, \infty)$ pentru care $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup abelian, unde „ $\cdot$ ” este înmulţirea matricelor.
- (b) Pentru k determinat anterior, arătaţi că grupurile $(\mathcal{M}, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe.

Ioana Maşca

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict crescătoare, cu $f(0) = 0$, iar I este un interval deschis cu proprietatea că $0 \notin I$. Demonstraţi că f admite primitive pe I dacă şi numai dacă f^2 admite primitive pe I .

Romeo Ilie

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e .

- (a) Demonstraţi că $(xyx^{-1})^{2023} = xy^{2023}x^{-1}$, $\forall x, y \in G$.
- (b) Demonstraţi că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2023} = e$, dacă şi numai dacă $b^{2023} = e$.

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n-1} + x^{n-1}}{x^{2n} + x^n + 1}$.

- (a) Determinaţi primitiva funcţiei f_1 care se anulează în 0.

- (b) Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x) dx$.

Gazeta Matematică

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.