Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, 4 aprilie 2018

CLASA a XI-a

Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n şi orice matrice coloană

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}),$$

notăm cu $\delta(\mathbf{X})$ cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Arătaţi că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(a) $|\det \mathbf{A}| = 1$ şi
(b) $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

(Cel mai mare divizor comun al unor numere întregi este număr natural.)

Soluţie. Arătăm că **(a)** implică **(b)**. Fie $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, fie $\mathbf{X} = (x_j) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ şi fie $\mathbf{BX} = (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Cum $y_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, rezultă că $\delta(\mathbf{X})$ divide fiecare y_i, deci $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{BX})$. **2p**

Cum $\mathbf{A}$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, rezultă că $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{AX}) \leq \delta(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. **1p**

Arătăm că **(b)** implică **(a)**. Fie $d = \det \mathbf{A}$. Dacă $d = 0$, atunci sistemul omogen $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$ are soluţii nenule în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Q})$ şi, prin înmulţirea uneia dintre aceste soluţii cu produsul numitorilor componentelor sale nenule, obţinem un $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}_{n,1}$, astfel încât $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$. Deci $0 < \delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{O}_{n,1}) = 0$, o contradicţie. Prin urmare, $d \neq 0$. **1p**

Fie $\mathbf{X}_i$ coloana i a matricei $\mathbf{A}^*$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Cum matricea coloană $\mathbf{AX}_i$ are toate componentele nule, cu excepţia componentei i, care este egală cu d, rezultă că $d = \delta(\mathbf{AX}_i) = \delta(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, deci toate elementele lui $\mathbf{A}^*$ sunt divizibile cu d. Prin urmare, $\det \mathbf{A}^*$ este divizibil cu d^n. Cum $\det \mathbf{A}^* = d^{n-1}$ şi $d \neq 0$, rezultă că $d = \pm 1$.
.... **3p**

Remarcă. O matrice pătrată cu elemente întregi şi determinant ± 1 se numeşte *unimodulară*. Evident, produsul a două matrice unimodulare este unimodular şi orice matrice unimodulară este inversabilă, iar inversa ei este şi ea unimodulară. Prima parte a soluţiei 1 arată că singura dificultate constă în a deduce unimodularitatea lui $\mathbf{A}$ din condiţia $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

Conform unei teoreme a lui Frobenius, pentru orice matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, există un număr natural $r \leq \min(m, n)$ şi două matrice unimodulare $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{Q}$, astfel încât $\mathbf{PAQ} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, unde toţi d_i sunt numere naturale şi fiecare d_i îl divide pe d_{i+1}.

Fie $m = n$ şi fie $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$ oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Unimodularitatea lui $\mathbf{Q}$ implică $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{QX})$; prin ipoteză, $\delta(\mathbf{QX}) = \delta(\mathbf{AQX})$, iar unimodularitatea lui

$\mathbf{P}$ implică $\delta(\mathbf{AQX}) = \delta(\mathbf{PAQX})$. Deci $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{PAQX})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Întrucât $\mathbf{PAQ}$ are forma diagonală de mai sus, rezultă că $r = n$ şi toţi $d_i = 1$, deci $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ este unimodulară.

Problema 2. Arătaţi că $2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$, oricare ar fi numărul real $x > 0$.

Soluţie. Fie $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$. Cum $f(x) = f(1/x)$, este suficient să arătăm că $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in (0,1]$. **1p**

Cum f este derivabilă şi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(1)$, pentru a demonstra inegalitatea din enunţ, este suficient să arătăm că valoarea lui f în orice zero al derivatei f' din $(0,1)$ este cel mult 1. .... **2p**

Fie $a \in (0,1)$, astfel încât $f'(a) = 0$. Rezultă că $2^{-1/a}/a^2 = 2^{-a}$, deci $2^{-1/a} = 2^{-a}a^2$. Cum $f(a) = 2^{-a}+2^{-1/a} = 2^{-a}(1+a^2)$, inegalitatea $f(a) \leq 1$ este echivalentă cu $1 \leq 2^a - a^2$. **2p**

Fie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - x^2$. Cum g este de două ori derivabilă şi $g''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \leq 2\left((\ln 2)^2 - 1\right) \leq 0$, oricare ar fi x în $[0,1]$, rezultă că g este concavă, deci $g(x) = g((1-x)\cdot 0 + x\cdot 1) \geq (1-x)g(0) + xg(1) = 1$. **2p**

Problema 3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care are proprietatea lui Darboux. Arătaţi că, dacă f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, atunci este f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Vom arăta că f este injectivă pe $\mathbb{R}$. Atunci, cum f are proprietatea lui Darboux, f este (strict) monotonă şi, prin urmare, continuă. **1p**

Presupunem că f nu este injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f(a) = f(b)$. Cum în intervalul (a,b) există cel puţin două numere iraţionale, iar f este injectivă pe mulţimea numerelor iraţionale, există $c \in (a,b)$, astfel încât $f(c) \neq f(a)$. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că $f(c) > f(a)$.

Fie $A = (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Cum A este numărabilă, rezultă că $f(A)$ este cel mult numărabilă, şi cum $(f(a), f(c))$ este nenumărabilă, rezultă că $(f(a), f(c)) \setminus f(A)$ este nevidă. ... **4p**

Fie $d \in (f(a), f(c)) \setminus f(A)$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $x_1 \in (a,c)$ şi $x_2 \in (c,b)$, astfel încât $f(x_1) = d = f(x_2)$. Din alegerea lui d, rezultă că x_1 şi x_2 sunt iraţionale, ceea ce contrazice injectivitatea lui f pe mulţimea numerelor iraţionale. .. **2p**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, şi fie $\mathbf{A}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ să aibă ranguri diferite. Arătaţi că există o matrice nenulă $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Soluţie. Întrucât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, $\mathbf{A}$ este o matrice singulară nenulă.

Dacă $n = 2$, atunci $\mathbf{A}^2 = (\mathrm{tr}\mathbf{A})\mathbf{A}$, conform teoremei Hamilton-Cayley. Deoarece $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, rezultă că $\mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$, deci $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}_2$ şi putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. **1p**

Fie $n \geq 3$. Întrucât $\mathbf{A}$ este singulară, 0 este o valoare proprie a lui $\mathbf{A}$.

Dacă toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ sunt nule, atunci $\mathbf{A}$ este nilpotentă, şi putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k$, unde k este cel mai mare număr întreg pentru care A^k este nenulă. **1p**

Dacă $\mathbf{A}$ are şi valori proprii nenule, fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, unde $1 \leq m \leq n-1$, valorile sale proprii nenule (nu neapărat distincte) şi fie

$$f = X\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i) = X^{m+1} + a_m X^m + \cdots + a_1 X,$$

unde $a_1 = (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m \neq 0$. Atunci $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, deoarece, în caz contrar, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(-a_1\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(a_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{m+1}) \leq \operatorname{rang}\mathbf{A}^2 < \operatorname{rang}\mathbf{A}$, contradicţie. **2p**

Fie $f_{\mathbf{A}}$ polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$. Conform teoremei Hamilton-Cayley, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Cum f este un factor al lui $f_{\mathbf{A}}$ şi $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, rezultă că $n = \deg f_{\mathbf{A}} > \deg f = m+1$.

Deci $\mathbf{A}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n) = f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$ şi $\mathbf{A}^{n-m}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Prin urmare, există un număr natural nenul $k < n-m$, astfel încât $\mathbf{A}^k\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n) \neq \mathbf{O}_n$ şi $\mathbf{A}^{k+1}\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n) = \mathbf{O}_n$. Evident, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k\prod_{i=1}^{m}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}_n)$ îndeplineşte condiţiile cerute în enunţul problemei. **3p**

Remarcă. Întrucât $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, există o celulă Jordan de dimensiune cel puţin 2 corespunzătoare valorii proprii 0. Prin urmare, polinomul minimal g al lui $\mathbf{A}$ are în 0 o rădăcină de multiplicitate cel puţin 2, deci $g = X^{k+1}h$, unde k este un număr natural nenul, iar h este un polinom care nu se anulează în 0. Atunci $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k h(\mathbf{A})$ este nenulă şi $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Fie $n \geq 3$. Dacă $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au acelaşi rang, existenţa unei matrice nenule $\mathbf{B}$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$, este condiţionată de multiplicitatea valorii proprii 0 în polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$.

De exemplu, dacă $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, unde $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt numere complexe nenule, distincte două câte două, atunci $\mathbf{A}$ şi $\mathbf{A}^2$ au rangul $n-1$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină simplă în 0. Întrucât singurele matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care comută cu $\mathbf{A}$, sunt cele diagonale, rezultă că nu există matrice nenule $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Pe de altă parte,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_{2,n-2} \\ \mathbf{O}_{n-2,2} & \mathbf{I}_{n-2} \end{pmatrix}$$

este o matrice idempotentă, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, de rang $n-2$ şi orice matrice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, al cărei unic element nenul este b_{12}, satisface condiţia $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină dublă în 0.