

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală Dâmbovița
17-02-2019
Clasa a X-a

Subiectul 1. Comparați numerele $\lg^2(5 + \sqrt{45})$ și $\lg(7 + \sqrt{45})$.

Subiectul 2. Determinați $x, y \in (0, +\infty)$ știind că $9^{\sqrt{x}} + 9^{\sqrt{y}} + 9^{\frac{1}{\sqrt{xy}}} = \frac{81}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{xy}}}$.

Subiectul 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $x + f(x) = f(f(x))$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).

- a) Arătați că f este injectivă.
- b) Rezolvați ecuația $f(f(x)) = 0$.

Subiectul 4. Arătați că dacă numerele complexe Z_1, Z_2, Z_3 și Z_4 sunt astfel încât

$$|Z_1 - Z_2| = 2, |Z_2 - Z_3| = \sqrt{2}, |Z_3 - Z_4| = 3\sqrt{2}, |Z_4 - Z_1| = 4 \text{ și } |Z_2 - Z_4| = 2\sqrt{5},$$

atunci $|Z_1 - Z_3| = \sqrt{10}$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.