



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I

a) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că:

$$(x+y+z)^2 + (x+y-z)^2 + (x-y+z)^2 + (-x+y+z)^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2$$

b) Demonstrați că numărul $4024^2 + 4026^2 + 4028^2$ se poate scrie ca o sumă de patru numere naturale, nenule, pătrate perfecte.

Ștefan Smărândoiu

c) Dacă $a = 2^{2013}$, $b = 3^{2013}$ și $c = 6^{-2013}$, atunci arătați că:

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1.$$

Ileana și Alexandru Statie

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ și

$$(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz$$

.....1 punct

Finalizare

.....1 punct

b) $4024^2 + 4026^2 + 4028^2 = 4(2012^2 + 2013^2 + 2014^2)$

.....1 punct

Conform subpunctului a)

$$4(2012^2 + 2013^2 + 2014^2) = (2012 + 2013 + 2014)^2 + (2012 + 2013 - 2014)^2 + \\ + (2012 - 2013 + 2014)^2 + (-2012 + 2013 + 2014)^2 = 6039^2 + 2011^2 + 2013^2 + 2015^2.$$

.....1 punct

c) $abc = 2^{2013} \cdot 3^{2013} \cdot 6^{-2013} = 1$

.....1 punct

Amplifică prima fracție cu c și obține

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = \frac{c}{abc+ac+c} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}$$

.....1 punct

Amplifică a doua fracție cu ac și obține

$$\frac{c}{1+ac+c} + \frac{ac}{c+abc+ac} + \frac{1}{ca+c+1} = \frac{ca+c+1}{ca+c+1} = 1$$

.....1 punct

Observație:

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{1}{ca+c+1} = \\ &= \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{1}{ca+c+1} = \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{ab}{a+abc+ab} = 1, \text{ sau} \end{aligned}$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al II-lea

- a) Să se demonstreze că $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
- b) Demonstrați că $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.
- c) Arătați că $\frac{x^3}{y^2(x+2z)} + \frac{y^3}{z^2(y+2x)} + \frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq 1$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

Dumitru Dobre și Cecilia Deaconescu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$ 1 punct
 $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b = c$1 punct

b) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow b(a+b)x^2 + a(a+b)y^2 \geq ab(x+y)^2 \Leftrightarrow$ 1 punct
 $\Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0$, cu egalitate pentru $bx = ay$1 punct

c) Conform subpunctului **b)**, avem: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c}$
 Tot, conform subpunctului **b)**: $\frac{(x+y)^2}{a+b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ 1 punct

Am obținut astfel inegalitatea: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ și $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$

și aplicând-o, obținem:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)} + \frac{y^3}{z^2(y+2x)} + \frac{z^3}{x^2(z+2y)} = \frac{x^4}{xy^2(x+2z)} + \frac{y^4}{yz^2(y+2x)} + \frac{z^4}{zx^2(z+2y)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(xy+yz+zx)^2} \dots 1 \text{ punct}$$

Conform rezultatului enunțat la subpunctul **a)**, $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz} \geq 1$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+$ și finalizăm:

$$\frac{x^3}{y^2(x+2z)} + \frac{y^3}{z^2(y+2x)} + \frac{z^3}{x^2(z+2y)} \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+xz+yz} \right)^2 \geq 1, \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+. \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al III-lea

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA . Lungimile segmentelor $[AM]$, $[AB]$ și $[AD]$ sunt direct proporționale cu numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, respectiv $\sqrt{6}$, iar distanța de la punctul M la dreapta BD este egală cu 8 cm .

- Aflați măsura unghiului dintre planele (MBD) și (ABC) .
- Demonstrați că dreapta BD și $(MAD) \cap (MBC)$ sunt drepte necoplanare.
- Aflați distanța de la punctul C la planul (MBD) .

Leon Genoiu și Marius Giurgiu

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

a) $\frac{MA}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{\sqrt{6}} = k$, unde $k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow MA = k\sqrt{2}; AB = k\sqrt{3}; AD = k\sqrt{6};$

Fie $AE \perp BD$, cu $E \in BD$. Din $MA \perp (ABC)$, $AE \perp BD$, $AE, BD \subset (ABC) \Rightarrow ME \perp BD$ 1 punct

$$\left. \begin{array}{l} (MBD) \cap (ABC) = BD \\ ME \perp BD \text{ și } ME \subset (MBD) \\ AE \perp BD \text{ și } AE \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle[(MBD), (ABC)] = \sphericalangle(ME, AE) = \sphericalangle MEA. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$\triangle MAE$ e dr. în A și $MA = AE = k\sqrt{2} \Rightarrow m(\sphericalangle MEA) = 45^\circ$ 1 punct

b) $M \in (MBC) \cap (MAD) \Rightarrow \exists g, a.i. (MBC) \cap (MAD) = g$, cu condiția $M \in g$;

$AD \parallel BC$, $AD \subset (MAD)$, $BC \subset (MBC)$, $(MBC) \cap (MAD) = g \Rightarrow g \parallel AD \parallel BC$ 1 punct

$g \parallel AD$, $AD \subset (ABC)$, $g \not\subset (ABC) \Rightarrow g \parallel (ABC) \Rightarrow g \cap (ABC) = \emptyset \Rightarrow g \cap BD = \emptyset \Rightarrow$
 $\Rightarrow g \parallel BD$ sau g și BD sunt drepte necoplanare; Dar $D \notin g$, $AD \parallel g \Rightarrow BD \parallel g$.

Deci g și BD sunt drepte necoplanare;1 punct

c) $k = 4 \Rightarrow MA = 4\sqrt{2}\text{ cm}; AB = 4\sqrt{3}\text{ cm}; AD = 4\sqrt{6}\text{ cm} \Rightarrow AC = BD = 12\text{ cm}$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$.

În semispațiul opus determinat de (ABC) și M , prin C construim, $CT \parallel MA$, a.i. $[CT] \equiv [MA]$...1 punct

Se arată că $MATC$ este paralelogram cu $MT \cap AC = \{O\}$. Din $MO \subset (MBD)$ și $T \in MO \Rightarrow T \in (MBD)$.

Construim $CF \perp BD$, cu $F \in BD$, și cu teorema celor trei perpendiculare, $TF \perp BD$.

Construim $CG \perp TF$, cu $G \in TF$ și cu reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare,

$CG \perp (MBD) \Rightarrow d[C, (MBD)] = CG$; $CT = CF = 4\sqrt{2}\text{ cm}; TF = 8\text{ cm}$ și $CG = 4\text{ cm}$1 punct

Sau c)

Planul (MBD) conține mijlocul segmentului $[AC] \Rightarrow d[C, (MBD)] = d[A, (MBD)]$1 punct

În $\triangle MAE$, fie $AS \perp ME$. Cu reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare, $d[A, (MBD)] = AS = 4\text{ cm}$.

.....1 punct



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013
CLASA a VIII-a

SUBIECTUL al IV-lea

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M, N , respectiv P , proiecțiile punctului C pe dreptele AB', AD' , respectiv $B' D'$. Demonstrați că:

- a) AC', BD' și $A'C$ sunt concurente.
- b) $BM \perp AB'$.
- c) Dreptele $AP, B'N$ și $D'M$ sunt concurente.

Ion Tudor, G.M. Nr. 3/2012

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- a) $ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow \exists O$ a.î. $AC' \cap BD' = \{O\}$, cu O mijlocul diagonalei $[BD']$ 1 punct
 $BCD'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C$ trece prin O , mijlocul diagonalei $[BD']$ 1 punct

- b) Din $CB \perp (ABB')$, $AB' \subset (ABB') \Rightarrow CB \perp AB'$ 1 punct
Din $AB' \perp BC$, $AB' \perp CM$ și $BC \cap CM = \{C\} \Rightarrow AB' \perp (BCM)$
 $AB' \perp (BCM)$ și $BM \subset (BCM) \Rightarrow AB' \perp BM \Leftrightarrow BM \perp AB'$ 1 punct

sau, direct:

Aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, din
 $CB \perp (ABA'), CM \perp AB', BM, AB' \subset (ABB') \Rightarrow BM \perp AB'$

- c) Analog, aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, obținem $DN \perp AD'$ și $C'P \perp B'D'$.
Fie $AB = a$, $BC = b$ $BB' = c$.

$$\text{Obținem } AB' = \sqrt{a^2 + c^2}, AD' = \sqrt{b^2 + c^2}, B'D' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cu teorema catetei, în $\triangle ABB'$, $AB^2 = AM \cdot AB' \Rightarrow AM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ și1 punct

$$B'M = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \text{ de unde } \frac{AM}{B'M} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{.....1 punct}$$

Analog $\frac{B'P}{D'P} = \frac{b^2}{a^2}$ și $\frac{D'N}{AN} = \frac{c^2}{b^2}$. În $\triangle AB'D'$ avem $\frac{AM}{B'M} \cdot \frac{B'P}{D'P} \cdot \frac{D'N}{AN} = 1$. Conform reciprocei

Teoremei lui Ceva, deducem că dreptele $AP, B'N$ și $D'M$ sunt concurente.1 punct