

Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a XII- a

Subiecte :

1. Se consideră mulțimea $G = (1, \infty)$ și funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x - 1$.
Determinați o lege de compoziție „ $*$ ” definită pe G astfel încât $(G, *)$ să fie grup,
iar funcția f să fie izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.
2. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$.
3. Să se determine submulțimile A ale lui $\mathbb{Z}_6$ cu proprietatea că A are trei elemente
și există o funcție $f: A \rightarrow A$, $f(x) = x + a$, $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$.

Prof. Bene Marius, Alexandria

4. Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{2t+1} dt$.
 - a) Calculați $f(1)$.
 - b) Arătați că $2f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x+1}$, pentru orice $x \in [1, \infty)$.
 - c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$.

*Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.*