

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală - 15.02.2014

Clasa a VIII-a

1. Determinați mulțimea $I = (-\infty; a] \cap [a^{-1}; \infty)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Discuție.

* * *

2. Arătați că $a(a+2)(a+5)(a+7) + 25$ este pătrat perfect pentru orice a număr natural.

* * *

3. Fie x, y, z numere raționale astfel încât $xyz = 2$.

a) Arătați că $\frac{1}{x} + y + z + 2 = \frac{(y+2)(z+2)}{2}$

- b) Arătați că $2(\frac{1}{x} + y + z + 2)(\frac{1}{y} + x + z + 2)(\frac{1}{z} + x + y + 2)$ reprezintă pătratul unui număr rațional.

GM (supliment cu exerciții) nr.11 / 2013

4. Prin mijlocul M al muchiei (AB) a tetraedrului $ABCD$ se duce un plan paralel cu AC și BD , care intersectează muchiile (BC) , (CD) și (DA) în N , P și, respectiv, Q . Determinați măsura unghiului dreptelor AC și BD , știind că aria patrulaterului $MNPQ$ este $\frac{1}{8} \cdot AC \cdot BD$

Manual pentru clasa a VIII-a, Editura Teora

Propunător: profesor Tiberiu Oprea, Colegiul Național "Al. I. Cuza" Focșani

SUCCES!

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a VIII-a

Soluții

1. $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \Rightarrow I = \Phi$

$a \in (-1; 0) \cup (1; \infty) \Rightarrow I = [a^{-1}; a]$

$a = -1 \Rightarrow I = \{-1\}$

$a = 1 \Rightarrow I = \{1\}$

2. $a(a+2)(a+5)(a+7) + 25 = (a^2+7a)(a^2+7a+10) + 25 =$
 $= (a^2+7a)^2 + 10(a^2+7a) + 25 =$
 $= (a^2+7a+5)^2$

3. a) $\frac{1}{x} + y + z + 2 = \frac{yz}{2} + y + z + 2 = \frac{yz + 2y + 2z + 4}{2} = \frac{(y+2)(z+2)}{2}$

b) $2\left(\frac{1}{x} + y + z + 2\right)\left(\frac{1}{y} + x + z + 2\right)\left(\frac{1}{z} + x + y + 2\right) =$
 $= 2 \cdot \frac{(y+2)(z+2)}{2} \cdot \frac{(x+2)(z+2)}{2} \cdot \frac{(y+2)(x+2)}{2} =$
 $= \left[\frac{(x+2)(y+2)(z+2)}{2} \right]^2$

4. Fie α planul paralel cu AC și BD care conține M

$\left. \begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ \alpha \cap (ABC) = MN \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AC$

$\Rightarrow MN \parallel PQ$

Analog $PQ \parallel AC$

$\Rightarrow MNPQ$ paralelogram

$MQ \parallel PN \parallel BD$

$MN = \frac{AC}{2} ; NP = \frac{BD}{2}$

Aria $MNPQ = MN \cdot NP \cdot \sin(\angle MNP) = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\angle AC, BD)}{4}$

$\sin(\angle AC, BD) = \frac{1}{2}$

Deci $m(\angle AC, BD) = 30^\circ$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a VIII-a

Bareme

1. $a \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \Rightarrow I = \Phi$ 3p
 $a \in (-1; 0) \cup (1; \infty) \Rightarrow I = [a^{-1}; a]$ 3p
 $a = -1 \Rightarrow I = \{-1\}$ 1p
 $a = 1 \Rightarrow I = \{1\}$

2. $a(a+2)(a+5)(a+7) + 25 = (a^2+7a)(a^2+7a+10) + 25 =$ 3p
 $= (a^2+7a)^2 + 10(a^2+7a) + 25 =$ 2p
 $= (a^2+7a+5)^2$ 2p

3. a) $\frac{1}{x} + y + z + 2 = \frac{yz}{2} + y + z + 2 = \frac{yz + 2y + 2z + 4}{2} = \frac{(y+2)(z+2)}{2}$ 3p
 b) $2(\frac{1}{x} + y + z + 2)(\frac{1}{y} + x + z + 2)(\frac{1}{z} + x + y + 2) =$
 $= 2 \frac{(y+2)(z+2)}{2} \cdot \frac{(x+2)(z+2)}{2} \cdot \frac{(y+2)(x+2)}{2} =$ 2p
 $= \left[\frac{(x+2)(y+2)(z+2)}{2} \right]^2$ 2p

4. Fie α planul paralel cu AC și BD care conține M
 $\left. \begin{array}{l} AC \parallel \alpha \\ \alpha \cap (ABC) = MN \end{array} \right\} \Rightarrow MN \parallel AC$ 2p
 $\Rightarrow MN \parallel PQ$
 Analog $PQ \parallel AC \Rightarrow MNPQ$ paralelogram 1p
 $MQ \parallel PN \parallel BD$
 $MN = \frac{AC}{2} ; NP = \frac{BD}{2}$ 1p
 $Aria MNPQ = MN \cdot NP \cdot \sin(\angle MNP) = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin(\angle AC, BD)}{4}$ 1p
 $\sin(\angle AC, BD) = \frac{1}{2}$ 1p
 Deci $m(\angle AC, BD) = 30^\circ$ 1p