



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală
18 februarie 2017

Clasa a VIII-a

1.a) Să se calculeze:

$$\sqrt{\underbrace{99 \dots 9^2}_{\text{de } m \text{ ori}} + \underbrace{88 \dots 8^2}_{\text{de } m \text{ ori}} - \underbrace{11 \dots 1^2}_{\text{de } m \text{ ori}}}, m \in \mathbb{N}^*.$$

b) Să se determine cifrele a și b care verifică egalitatea:

$$\sqrt{aba} = (a + b - 1) \cdot \sqrt{a + b}.$$

2. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

$$a^2 + a + b = c^2, \text{ știind că } 4b - 1 \text{ este număr prim.}$$

3. Fie cubul $ABCD A' B' C' D'$. Considerăm punctele $E \in (BD)$ astfel încât $BD = 4 \cdot DE$ și $E' \in (B' D')$ astfel încât $D' E' = 3 \cdot B' E'$. Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele muchiilor $AB, BC, C' D',$ și respectiv $A' D'$, arătați că:

- a) Planele (EPQ) și $(E' MN)$ sunt paralele;
- b) Dacă $BD' \cap (E' MN) = \{T\}$ și $BD' \cap (EPQ) = \{T'\}$, atunci $TT' = 2BT$.

4. Fie $ABCD$ un tetraedru. Dacă $AB \perp CD$ și $AC + BD = BC + AD$, să se arate că $AC^n + BD^n = BC^n + AD^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.

Soluții și bareme orientative
Clasa a VIII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1.a) Se notează $a = \underbrace{11 \dots 1}_{de\ m\ ori}$, iar expresia din enunț se scrie:

$$\sqrt{\underbrace{99 \dots 9^2}_{de\ m\ ori} + \underbrace{88 \dots 8^2}_{de\ m\ ori} - \underbrace{11 \dots 1^2}_{de\ m\ ori}} = \sqrt{81a^2 + 64a^2 - a^2} = \sqrt{144a^2} = 12a =$$

$$= 12 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{de\ m\ ori} = 1 \underbrace{33 \dots 32}_{de\ (m-1)\ ori}.$$

(2p)

b) Folosind notația $a + b - 1 = n$, $a = \overline{1,9}$, $b = \overline{0,9}$, egalitatea din enunțul problemei se rescrie astfel:

$$\overline{aba} = n^2 \cdot (n + 1). (*)$$

(1p)

Prin urmare, avem:

$$n^3 < n^2 \cdot (n + 1) = \overline{aba} \leq 999 \Rightarrow n \in \{1, 2, \dots, 9\}.$$

(1p)

I. Pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n^2 \cdot (n + 1) < 100$, deci relația (*) nu este adevărată.

(1p)

II. Pentru $n = 5$, (*) devine $\overline{aba} = 150$, pentru $n = 7$, (*) devine $\overline{aba} = 392$, pentru $n = 8$, (*) devine $\overline{aba} = 576$, iar pentru $n = 9$, (*) devine $\overline{aba} = 810$. Toate aceste relații obținute nu sunt verificate pentru nicio valoare a cifrelor a și b .

(1p)

III. Pentru $n = 6$, (*) devine $\overline{aba} = 252$, deci $a = 2$ și $b = 5$.

În concluzie, cifrele a și b care verifică egalitatea din enunț sunt $a = 2$ și $b = 5$.

(1p)

2. Ecuația dată este echivalentă cu:

$$4c^2 - (4a^2 + 4a + 1) = 4b - 1 \Leftrightarrow 4c^2 - (2a + 1)^2 = 4b - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2c - 2a - 1) \cdot (2c + 2a + 1) = 4b - 1.$$

(2p)

Deoarece $4b - 1$ este prim și $2c + 2a + 1 > 2c - 2a - 1 \Rightarrow 2c - 2a - 1 = 1$ și

$$2c + 2a + 1 = 4b - 1 \Rightarrow b = c.$$

(1p)

$$\text{Cu aceasta ecuație dată devine: } a^2 + a + b = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b) \cdot (a + b) + a + b = 0 \Leftrightarrow (a + b) \cdot (a - b + 1) = 0.$$

(1p)

Dar $a + b \neq 0$ deoarece din $a + b = 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0 \Rightarrow a = b = 0$, deci $4b - 1$ nu este prim,

absurd. (1p)

Deci $a - b + 1 = 0$ sau $b = a + 1$. Numărul prim $4b - 1$ se scrie astfel:

$4b - 1 = 4(a + 1) - 1 = 4a + 3$ și există o infinitate de numere prime de această formă. Deci

$a = k$, $c = b = k + 1$ sunt soluții ale ecuației date, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $4k + 3$

este număr prim. (2p)

3.a) Din (MN) liniile mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ (1)

Din (PQ) liniile mijlocie în triunghiul $A'C'D' \Rightarrow PQ \parallel A'C'$ (2)

Din $AA'C'C$ paralelogram $\Rightarrow AC \parallel A'C'$ (3)

Din relațiile (1), (2), (3) $\Rightarrow MN \parallel PQ$ (4).)(1p)

Dacă $MN \cap BD = \{F\}$ și MN linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow BD = 4BF$.

Dacă $PQ \cap B'D' = \{F'\}$ și PQ linie mijlocie în triunghiul $A'C'D' \Rightarrow B'D' = 4D'F'$ și din $BD = 4 \cdot DE \Rightarrow DE = D'F'$ și cum $DE \parallel D'F' \Rightarrow DD'F'E$ este paralelogram $\Rightarrow DD' \parallel EF'$ (5)

Dacă $MN \cap BD = \{F\}$ și analog arătăm că $BB' \parallel FE'$ (6)

Din $BB' \parallel DD'$ și (5), (6) $\Rightarrow EF' \parallel FE'$ (7))(2p)

Din (4) și (7) $\Rightarrow (EPQ) \parallel (E'MN)$ (1p)

b) Cum $(E'MN) \cap (BDD') = E'F$ și $BD' \cap (E'MN) = \{T\} \Rightarrow T \in E'F$

și $(EPQ) \cap (BDD') = F'E$ și $BD' \cap (EPQ) = \{T'\} \Rightarrow T' \in F'E$

Dacă $OO' \cap BD' = \{R\}$, în $\triangle BTF$ avem $TF \parallel RO \parallel ET' \Rightarrow$ aplicând teorema lui Thales

$$\frac{BT}{T'T} = \frac{BF}{FE} = \frac{1}{2} \Rightarrow TT' = 2BT. \quad (3p)$$

4. Fie E proiecția lui A pe dreapta CD . Deoarece $AB \perp CD, AB \cap AE = \{A\} \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BE$.

(2p)

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile AEC și BED avem

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (AE^2 + ED^2) + (CE^2 + BE^2) \Rightarrow \\ AC^2 + BD^2 &= AD^2 + BC^2, (1). \end{aligned}$$

(2p)

Notând $AC = b, BD = a, AD = c, BC = d$, relația din ipoteză se mai scrie $a + b = c + d$ (*),

(1p)

iar relația (1) devine $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow$

$$(a + b)^2 - 2ab = (c + d)^2 - 2cd \Rightarrow ab = cd (**).$$

(1p)

Din relațiile (*), (**) $\Rightarrow (a = c \text{ și } b = d)$ sau $(a = d \text{ și } b = c)$
 $\Rightarrow a^n + b^n = c^n + d^n, \forall n \in \mathbb{N}$,

adică ceea ce trebuia demonstrat.

(1p)