

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a V-a

1. Arătați că dacă numărul $\overline{abcab}$ dă restul 9 la împărțirea cu 91, atunci cel puțin o cifră a sa este 1.
2. Fie numărul $N = 17 + 17^2 + 17^3 + \dots + 17^{2020}$.
 - (a) Demonstrați că N este divizibil cu 18.
 - (b) Determinați ultima cifră a numărului N .
3. Fie numerele $A = 2^{4037} + 2^{2020} + 2$ și $B = 2^{2018} + 1$.
 - (a) Arătați că B divide A .
 - (b) Este A pătrat perfect?
4.
 - (a) Există numere naturale x și y pentru care $x^4 + y^4 = 2019^{2020} + 3$?
 - (b) Există numere naturale x, y, z, t pentru care $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2018^{2021}$?

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, februarie 2020

Clasa a VI-a

1. Se consideră x, y, z şi t numere raţionale strict pozitive, astfel încât:

$$\frac{4x + 3y + 2z - t}{4t} = \frac{4y + 3z + 2t - x}{4x} = \frac{4z + 3t + 2x - y}{4y} = \frac{4t + 3x + 2y - z}{4z}.$$

Arătaţi că

$$\frac{(4x + 3y + 2z)(4y + 3z + 2t)(4z + 3t + 2x)(4t + 3x + 2y)}{xyzt} = 9^4.$$

2. Fie numerele naturale a, b, c, d , astfel încât:

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{2019202020192020\dots20192020}_{2024 \text{ cifre}} \\ b &= \underbrace{2020201920202019\dots20202019}_{2024 \text{ cifre}} \\ c &= \underbrace{201920202021201920202021\dots201920202021}_{2028 \text{ cifre}} \\ d &= \underbrace{202120202019202120202019\dots202120202019}_{2028 \text{ cifre}} \end{aligned}$$

Arătaţi că:

- (a) Numerele 2019, 2020, 2021 nu sunt pătrate perfecte, dar 2025 este pătrat perfect.
 - (b) Produsul $b \cdot c$ nu este pătrat perfect.
 - (c) Produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d$ nu este pătrat perfect.
3. Fie k un număr natural nenul şi mulţimile $A = \{k, k + 1, k + 2, \dots, 8k\}$, $B = \{4k, 6k, 8k\}$. Arătaţi că oricare ar fi mulţimile X şi Y , cu $X, Y \subset A$, $X \cup Y = A$ şi $X \cap Y = \emptyset$, există $x \neq y$, cu $x, y \in X$ sau $x, y \in Y$, astfel încât $x + y \in B$.
4. Fie unghiul propriu $\widehat{AOB}$ şi punctele M în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ şi N în exteriorul unghiului $\widehat{AOB}$, astfel încât B se află în interiorul unghiului $\widehat{MON}$. Dacă (OP este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$, măsura unghiului $\widehat{POB}$ este de 60° şi măsura unghiului $\widehat{BOM}$ este de două ori mai mare decât măsura unghiului $\widehat{BON}$, arătaţi că bisectoarea unghiului $\widehat{AOP}$ este perpendiculară pe ON .

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
 Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a VII-a

1. Fie numerele $x = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + \dots + \sqrt{3^{2020}}$ şi $y = 3^{1011} - \sqrt{3}$. Calculaţi partea întreagă a numărului $\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{y}{x}$.
2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:
 - (a) $\left|x - \frac{3}{2}\right| + |x - 1| = x - 2$.
 - (b) $\left[x - \frac{3}{2}\right] + [x - 1] = x - 2$.
3. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 5$ cm, $AC = 9$ cm şi $BD = 12$ cm, iar $AC \cap BD = \{O\}$.
 - (a) Arătaţi că triunghiul AOB este dreptunghic şi calculaţi aria trapezului $ABCD$.
 - (b) Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului OAB , centrul cercului circumscris triunghiului OCD şi punctul O sunt coliniare.
4. Se consideră triunghiul echilateral ABC . Pe semidreapta $(BA$, cu originea în B , se consideră un punct M astfel încât $BM > AB$, iar pe semidreapta $(CA$, cu originea în C , se consideră un punct N , astfel încât $CN > CA$. Ştiind că $BM = AN$, iar Q este simetricul lui M faţă de CN , arătaţi că $CMNQ$ este romb.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a VIII-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[2019x] + \{2020x\} = 2020$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă numărului real a și cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului a .
2. Fiind date numerele $A = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ și $B = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:
 - (a) $\sqrt{A+B} \notin \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n ;
 - (b) unul și numai unul dintre numerele A și B este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ și punctele M și N mijloacele muchiilor BC , respectiv VD . Arătați că $AB = AV$, dacă și numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB și MN este egală cu 30° .
4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp (BCD)$, iar $AD^2 = BD^2 + CD^2$. Fie E și F proiecțiile lui D pe AB , respectiv pe AC .
 - (a) Știind că $EF \cap (BCD) = \{P\}$ astfel încât $BC = 3CP$, aflați raportul dintre arie triunghiului AEF și aria triunghiului ABC .
 - (b) Arătați că există un punct $O \in (BCD)$, egal depărtat de punctele B, C, D, E și F .

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.