



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a

Subiect 1

Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + a} - b}{x - 2} = \frac{3}{4}$.

Subiect 2

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}, x_0 = 0, x_1 = 1$

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} x_{n-1} & x_n \\ x_n & x_{n+1} \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = (-1)^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiect 3

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A) = \{X \in M_3(C) / A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X \in C(A)$, atunci există $a, b, c \in C$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3 = O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3 = A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Subiect 4

Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ și propozițiile :

(P_1) Șirul $x_n = a_{n+1} - a_n, n \in \mathbb{N}^*$ este convergent la zero.

(P_2) Șirul $y_n = \max(a_n, a_{n+1}), n \in \mathbb{N}^*$ este convergent