

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
10.02.2024

CLASA a XII -a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x * y = x + y + xy$ și se notează $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ de } x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

- a) numerele reale x care sunt egale cu simetricile lor în raport cu legea „*”;
- b) numerele reale y pentru care $y_6 = 63$;
- c) numerele reale k pentru care mulțimea $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „*”.

Soluție:

- a) Elementul neutru al legii „*” este $e = 0$ și simetricul lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este

$$x' = -\frac{x}{1+x}. \text{ Din } x = x', \text{ se deduce } x \in \{0, -2\}.$$

- b) Avem că $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și legea „*” este asociativă. Atunci $y_2 = y * y = (y + 1)^2 - 1$, de unde rezultă că $y_4 = y_2 * y_2 = (y + 1)^4 - 1$. Cum $y_6 = y_4 * y_2$, deducem că $y_6 = (y + 1)^6 - 1$. Din $(y + 1)^6 - 1 = 63$, rezultă că $y \in \{-3, 1\}$.

- c) Dacă $M = [k, +\infty)$ este parte stabilă, atunci $k * k \in M$, de unde se obține

$$k^2 + 2k \geq k, \text{ adică } k \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty).$$

Pentru $k < -1$, luând $x = k \in M$ și $y = k^2 \in M$, se obține

$$x * y = k(k^2 + k + 1) < k, \text{ de unde deducem că } x * y \notin M.$$

Pentru $k = -1$, dacă $x, y \in [-1, +\infty)$, atunci $(x + 1)(y + 1) \geq 0$, deci $x * y \in M$.

Pentru $k \geq 0$, dacă $x, y \in M$, atunci $x, y \geq 0$ și $x * y = x + y + xy \geq x \geq k$, deci $x * y \in M$.

Concluzionăm că $k \in [0, +\infty) \cup \{-1\}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Află că elementul neutru al legii „ $*$ ” este $e = 0$ și simetricul lui $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ este $x' = -\frac{x}{1+x}$.	1p
Rezolvă ecuația $x = x'$ și obține $x \in \{0, -2\}$.	1p
b) Arată că $y_6 = (y + 1)^6 - 1$	1p
Obține $y \in \{-3, 1\}$.	1p
c) Pune condiția $k * k \in M$, de unde obține $k \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.	1p
Arată că, pentru $k < -1$, M nu este parte stabilă.	1p
Arată că, pentru $k = -1$ și $k \geq 0$, M este parte stabilă.	1p

2. Să se calculeze

$$\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx.$$

Soluție:

Avem că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \int (x^3 \cdot e^x) \cdot \left(\frac{-1}{x+3}\right)' dx$. Integrând succesiv prin părți, obținem că

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx &= -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int (x^3 \cdot e^x)' \cdot \frac{1}{x+3} dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int e^x \cdot x^2(x+3) \cdot \frac{1}{x+3} dx = \\ &= -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int (e^x)' \cdot x^2 dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + e^x \cdot x^2 - 2 \int e^x \cdot x dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + e^x \cdot x^2 - 2(e^x \cdot \\ &= x - e^x) + C = e^x \cdot \left(-\frac{x^3}{x+3} + x^2 - 2x + 2\right) + C = e^x \cdot \frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} + C. \end{aligned}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Observă că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = \int (x^3 \cdot e^x) \cdot \left(\frac{-1}{x+3}\right)' dx$.	2p
Integrează prin părți și obține că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = -\frac{x^3 \cdot e^x}{x+3} + \int e^x \cdot x^2 dx$.	2p
Integrează prin părți și obține că $\int e^x \cdot x^2 dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.	2p
Obține că $\int \frac{x^3 \cdot e^x}{(x+3)^2} dx = e^x \cdot \frac{x^2 - 4x + 6}{x+3} + C$.	1p

3. Se consideră grupul $(G, \cdot)$ cu elementul neutru e .

- a) Demonstrați că $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, \forall a, b \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$;
 b) Demonstrați că dacă există $a, b \in G$ astfel încât $ababa = babab$, atunci $a^{2024} = e$, dacă și numai dacă $b^{2024} = e$.

Soluție:

- a) Demonstrăm prin inducție matematică. Fie $P(n): (aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$.
 $P(1): aba^{-1} = aba^{-1}$ (adevărată).
 $P(k) \rightarrow P(k+1), \forall k \in \mathbb{N}^*$. Presupunem $P(k)$ adevărată, de unde rezultă că $(aba^{-1})^{k+1} = (aba^{-1})^k \cdot (aba^{-1}) = ab^k a^{-1} aba^{-1} = ab^{k+1} a^{-1}$, deci $P(k+1)$ este adevărată, de unde concluzia că $(aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, \forall a, b \in G$ și $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) Dacă $ababa = babab$, atunci $(ab)^2 a = (ba)^2 b$. Înmulțind la stânga și la dreapta cu $(ab)^{-1}$, obținem $(ab)a(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b(ab)$. Conform subpunctului a), avem că $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b^{2024}(ab)$. Dacă $a^{2024} = e$, atunci $(ab)^{-1}b^{2024}(ab) = e$, iar înmulțind la stânga și la dreapta cu (ab) , respectiv $(ab)^{-1}$, obținem că $b^{2024} = e$. Analog, dacă $b^{2024} = e$, atunci $a^{2024} = e$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Demonstrează prin inducție matematică $P(n): (aba^{-1})^n = ab^n a^{-1}, n \in \mathbb{N}^*$.	3p
b) Deduce că dacă $ababa = babab$, atunci $(ab)^2 a = (ba)^2 b$, deci $(ab)a(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b(ab)$.	1p
Deduce, folosind subpunctul a), că $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = (ab)^{-1}b^{2024}(ab)$.	1p
Argumentează că dacă $a^{2024} = e$, atunci $(ab)^{-1}b^{2024}(ab) = e$, deci $b^{2024} = e$.	1p
Argumentează că dacă $b^{2024} = e$, atunci $(ab)a^{2024}(ab)^{-1} = e$, deci $a^{2024} = e$.	1p

4.

- a) Să se arate că funcțiile $F, G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \arctg x$ și $G(x) = -\arctg \frac{1}{x}$ sunt primitive ale aceleași funcții;
- b) Să se calculeze

$$\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg x) dx, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție:

- a) Avem că $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in (0, +\infty)$, de unde concluzia.
- b) Din subpunctul a), cum două primitive ale aceleași funcții diferă printr-o constantă, rezultă că $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = c, \forall x \in (0, +\infty)$. Pentru $x = 1$, deducem că $c = 2\arctg 1 = \frac{\pi}{2}$, de unde rezultă că $\arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctg x, \forall x \in (0, +\infty)$. Efectuând în integrală schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{y^2} dy$, obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2 + x + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg x) dx = \\ &= \int_n^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{y^{2023}} \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{2023}}{\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1\right)^{2024}} \cdot \cos\left[2024 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg y\right)\right] \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \\ &= - \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(\ln y)^{2023}}{y^{2023} \cdot \frac{1}{y^{4048}} \cdot (y^2 + y + 1)^{2024}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cos(1012\pi - 2024 \arctg y) dy = \\ &= - \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(y \ln y)^{2023}}{(y^2 + y + 1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg y) dy = -I. \end{aligned}$$

Cum $I = -I$, rezultă că $I = 0$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $F'(x) = G'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in (0, +\infty)$.	2p
b) Obține identitatea $\arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctg x, \forall x \in (0, +\infty)$.	1p
Efectuează schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{y^2} dy$.	1p
Obține $\int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(x \ln x)^{2023}}{(x^2+x+1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg x) dx = \int_n^{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{y^{2023}} \left(\ln \frac{1}{y}\right)^{2023}}{\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} + 1\right)^{2024}} \cdot$ $\cos \left[2024 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg y \right) \right] \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy =$	1p
$= - \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(\ln y)^{2023}}{y^{2023} \cdot \frac{1}{y^{4048}} \cdot (y^2 + y + 1)^{2024}} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \cos(1012\pi - 2024 \arctg y) dy =$	1p
$= - \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{(y \ln y)^{2023}}{(y^2+y+1)^{2024}} \cdot \cos(2024 \arctg y) dy$ și concluzia că valoarea integralei este 0.	1p