S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a VII-a
Bareme de corectare

Subiectul I.

Să se determine toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$, pătrate perfecte, stiind că $\sqrt{\overline{0,x(yz)}+\overline{0,z(xy)}+\overline{0,y(zx)}}$ este un număr natural nenul.

Soluţie

1p oficiu

Avem

$\sqrt{\overline{0,x(yz)}+\overline{0,z(xy)}+\overline{0,y(zx)}} \in$N, => $\overline{0,x(yz)}+\overline{0,z(xy)}+\overline{0,y(zx)}$ =k^2, k$\in$N

=> $\dfrac{\overline{xyz}+\overline{zxy}+\overline{yzx}}{990}$ =k^2 => x+y+z=9k^2 3p

=> x+y+z=9. Cum $\overline{xyz}$ este pătrat perfect, =>

$\overline{xyz} \in \{144, 225, 324, 441\}$ 3p

Subiectul II.

a) Calculaţi suma S=$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+......+\dfrac{1}{2012\cdot 2013}$.

b) Determinaţi x astfel încât $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{6}\right|+\left|x-\dfrac{1}{12}\right|+\left|x+\dfrac{1}{20}\right|=\dfrac{4}{5}$

c) Demonstraţi că pentru orice număr raţional x, are loc inegalitatea:

$$\left|x-\frac{1}{1\cdot 2}\right|+\left|x+\frac{1}{2\cdot 3}\right|+\left|x-\frac{1}{3\cdot 4}\right|+.......+\left|x-\frac{1}{2011\cdot 2012}\right|+\left|x+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right|\geq\frac{2012}{2013}$$

Soluţie

1p oficiu

Folosim relaţia. a) $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ 1p

S=$\dfrac{2012}{2013}$ 1p

b) folosim inegalitatea: |a|+|b|$\geq$|a+b|

1p

$\dfrac{4}{5}=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{6}\right|+\left|x-\dfrac{1}{12}\right|+\left|x+\dfrac{1}{20}\right|\geq\left|4x-\dfrac{11}{30}\right|$ **1p**

$-1<-\frac{13}{120}\leq x\leq\frac{35}{120}<1 \Rightarrow x=0$ **1p**

c) $\left|x-\frac{1}{1\cdot 2}\right|+\left|x+\frac{1}{2\cdot 3}\right|+\left|x-\frac{1}{3\cdot 4}\right|+\left|x+\frac{1}{4\cdot 5}\right|+.......+\left|x+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right|=$

$=\left|-x+\frac{1}{1\cdot 2}\right|+\left|x+\frac{1}{2\cdot 3}\right|+\left|-x+\frac{1}{3\cdot 4}\right|+\left|x+\frac{1}{4\cdot 5}\right|+..........+\left|x+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right|\geq$

$\geq\left|\left(-x+\frac{1}{1\cdot 2}\right)+\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(-x+\frac{1}{3\cdot 4}\right)+.....+\left(x+\frac{1}{2012\cdot 2013}\right)\right|\geq\frac{2012}{2013}$ **1p**

Subiectul III.

Prin punctul E situat pe diagonala AC a paralelogramului ABCD se duce o paralelă la BD care intersectează dreptele AB, BC, CD, DA în punctele M,N,P,Q. Demonstraţi că:

a) MQ+PN= constant

b) AM·CN=AQ·CP

Solutie

1p oficiu

a) MQ+PN = MP+PN = MP+QN 1p

PDBM si NBDQ parallelograme

MP=BD=QN 1p

MQ+PN=2BD

b) $AM \parallel CP \Rightarrow \Delta AEM \sim \Delta EPC \Rightarrow \frac{AM}{CP}=\frac{AE}{EC}$ 1p

$AQ \parallel CN \Rightarrow \Delta AQE \sim \Delta ENC \Rightarrow \frac{AQ}{CN}=\frac{AE}{EC}$ 1p

$\frac{AM}{CP}=\frac{AQ}{CN}$ 1p

AM·CN=AQ·CP

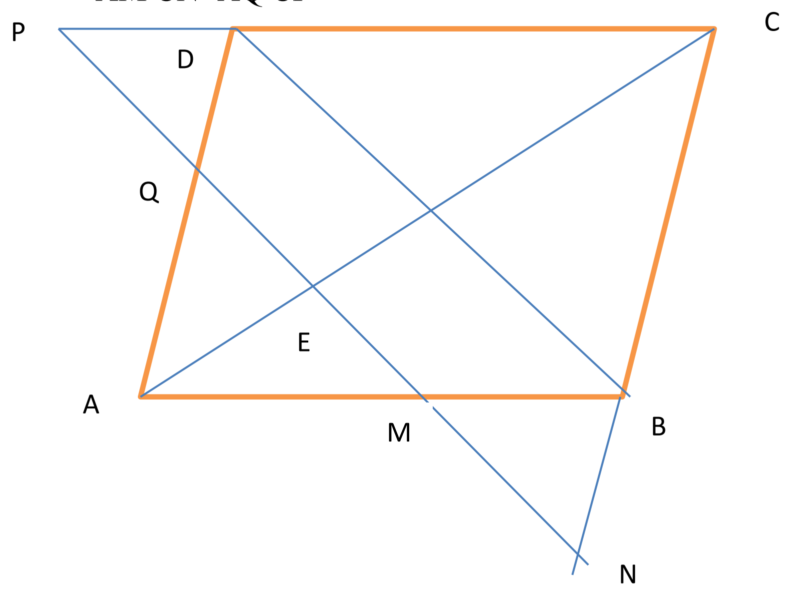

Figura 1p

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Subiectul IV.

Demonstraţi că nu există numere naturale *x*, *y*, *z* pentru care

$x + 3y + 5z = 2012$ şi $x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$.

(Gazeta Matematică)

Soluție

1p oficiu

a) $x + 3y + 5z = 2012$ (1)

$x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$ (2)

Din (1) si (2) prin diferenta obtinem $x^2 - x + y^2 - 3y + 3z^2 - 5z = 1 \Leftrightarrow$

$x(x-1) + y(y-3) + z(3z-5) = 1$. **1 punct**

Deci 2 termeni sunt nuli iar unul este = 1.

x(x-1)=par (produs de nr. consecutive). Distingem urmatoarele situatii:

I. y si z au aceeasi paritate => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par => par =1 fals. **1 punct**

II. y si z au paritati diferite => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par => par =1 fals. **1 punct**