

Barem clasa a IX-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwartz, avem

$$\left(\sqrt{a_1+2} \cdot 1 + \sqrt{a_2+6} \cdot 1 + \dots + \sqrt{a_n+n} \cdot (n+1) \cdot 1\right)^2 < (1+1+\dots+1) \cdot (a_1+2+a_2+6+\dots+a_n+n \cdot (n+1))$$

$$< n \cdot (a_1+a_2+\dots+a_n+1 \cdot 2+2 \cdot 3+\dots+n \cdot (n+1)) \quad (1)$$

(10 p)

Se demonstrează prin inducție matematică că $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$.

(5 p)

Înlocuind în relația (1) se obține inegalitatea cerută.

(5 p)

Subiectul II. (30 puncte)

Se arată că A,B,C mijloacele segmentelor NM, NP respective MP, deci

$$\vec{r}_A = \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N), \quad \vec{r}_B = \frac{1}{2}(\vec{r}_P + \vec{r}_N) \text{ și } \vec{r}_C = \frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_P)$$

(10 p)

$$G_1 \text{ centrul de greutate al triunghiului BCP} \Rightarrow \vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_B + \vec{r}_C + \vec{r}_P)$$

$$G_2 \text{ centrul de greutate al triunghiului ACM} \Rightarrow \vec{r}_{G_2} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_M)$$

$$G_3 \text{ centrul de greutate al triunghiului ABN} \Rightarrow \vec{r}_{G_3} = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_N)$$

Se observă că $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P = \vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_3}$ **(10 p)**

Din $\vec{AG}_1 = \vec{r}_{G_1} - \vec{r}_A$, $\vec{BG}_2 = \vec{r}_{G_2} - \vec{r}_B$ și $\vec{CG}_3 = \vec{r}_{G_3} - \vec{r}_C$ rezultă că $\vec{AG}_1 + \vec{BG}_2 + \vec{CG}_3 = \vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_3} - (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \vec{0}$,
deci cu vectorii $\vec{AG}_1, \vec{BG}_2$ și $\vec{CG}_3$ se poate construi un triunghi. **(10 p)**

Subiectul III. (25 puncte)

a) Teorema bisectoarei ne permite să scriem :

$$(b+c) \cdot \vec{AD} = b \cdot \vec{AB} + c \cdot \vec{AC}, \quad (1)$$

$$(a+c) \cdot \vec{BE} = a \cdot \vec{BA} + c \cdot \vec{BC}, \quad (2) \quad \text{span style="float: right;">**(20 p)**}$$

$$(a+b) \cdot \vec{CF} = a \cdot \vec{CA} + b \cdot \vec{CB}. \quad (3)$$

Înmulțind relația (1) cu a , relația (2) cu b și relația (3) cu c și apoi însumând egalitățile obținute, găsim :

$$a(b+c) \cdot \vec{AD} + b(a+c) \cdot \vec{BE} + c(a+b) \cdot \vec{CF} = \vec{0}. \quad \text{span style="float: right;">**(5 p)**}$$

Subiectul IV. (15 puncte)

$$a_k = \sqrt{(k^2 - k - 2)(k^2 + 7k + 10) + 36} = \sqrt{(k-2)(k+1)(k+2)(k+5) + 36} =$$

$$= \sqrt{(k^2 + 3k - 10)(k^2 + 3k + 2) + 36}$$

$$\text{Notăm } k^2 + 3k - 10 = t \Rightarrow a_t = \sqrt{t(t+12) + 36} = t + 6$$

$$\text{Deci } a_k = k^2 + 3k - 4 \quad \text{span style="float: right;">**(10 p)**}$$

$$\text{Pentru } k = 1 \text{ avem } \lfloor \sqrt{a_1} \rfloor = 0, \text{ pentru } k \in \{2, 3, 4\} \text{ avem } \lfloor \sqrt{a_k} \rfloor = k.$$

$$\text{Pentru } k \geq 5 \Rightarrow k+1 \leq \sqrt{k^2 + 3k - 4} < k+2 \Rightarrow \lfloor \sqrt{a_k} \rfloor = k+1.$$

$$\text{Obținem } 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + \dots + n + 1 = 490 \Leftrightarrow (n+1)(n+2) = 992 \Rightarrow n = 30 \quad \text{span style="float: right;">**(5 p)**}$$

Barem clasa a X-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicăm inegalitatea lui Jensen funcției f , $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = tg^2 x$ (5 p)

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leq \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}, \text{ de unde } tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 3tg^2\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \Rightarrow$$
$$tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 3tg^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 9. \quad (10 \text{ p})$$

Egalitatea are loc pentru $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. (5 p)

Subiectul II. (30 puncte)

$$13^{x^2} \cdot 25^{x^2+2x+\frac{3}{2}} \cdot 31^{x^2+x+1} = 2015 / : (13 \cdot 5 \cdot 31) \Rightarrow \quad (10 \text{ p})$$

$$13^{x^2-1} \cdot 25^{x^2+2x+1} \cdot 31^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow 13^{(x+1)(x-1)} \cdot 25^{(x+1)^2} \cdot 31^{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow [13^{x-1} \cdot 25^{x+1} \cdot 31^x]^{(x+1)} = 1. \quad (10 \text{ p})$$

Logaritmăm ambii membri: $(x+1) \cdot \lg(13^{x-1} \cdot 25^{x+1} \cdot 31^x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ și $(x-1) \cdot \lg 13 + (x+1) \cdot \lg 25 + x \cdot \lg 31 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\lg 13 - \lg 25}{\lg 13 + \lg 25 + \lg 31}. \quad (10 \text{ p})$$

Subiectul III. (20 puncte)

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2} \quad (10 \text{ p})$$

$$\Rightarrow \log_n \frac{n+1}{2} > \log_n \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n} \quad (10 \text{ p})$$

Subiectul IV. (20 puncte)

Aflarea rădăcinilor ecuației binome $z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ și reprezentarea lor (15 p)

Imaginile geometrice ale rădăcinilor ecuației sunt vârfurile unui pătrat înscris în cercul unitate, ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate. (2 p)

Axele de coordonate împart pătratul $M_1 M_2 M_3 M_4$ în patru pătrate de latură $\frac{\sqrt{2}}{2}$ și diagonale egale cu 1, deci distanța maximă dintre două puncte $P_i(z_i), P_j(z_j)$ aflate în interiorul unui astfel de pătrat este $|z_i - z_j| < 1$ (2 p)

Cum avem 5 puncte, există două care se află într-un astfel de pătrat (principiul cutiei) (1 p)

Barem clasa a XI-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Se arată că dacă $a + b + c = \pi$ atunci $tga + tgb + tgc = tga \cdot tgb \cdot tgc$.

(5 p)

Folosind proprietățile determinanților, avem

$$\begin{vmatrix} tga & tgc - 1 & tgb + 1 \\ tgc + tgb & tga - 1 & 1 \\ tga \cdot tgb \cdot tgc & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 1 & tgc - 1 & tgb + 1 \\ tga \cdot tgb \cdot tgc & tga - 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 - l_1, l_3 - l_1} \begin{vmatrix} 1 & tgc - 1 & tgb + 1 \\ 0 & tga - tgc & -tgb \\ 0 & -tgc & -tgb \end{vmatrix} = tga \cdot tgb \cdot tgc \begin{vmatrix} tga - tgc & -tgb \\ -tgc & -tgb \end{vmatrix}$$

(15 p)

$$= -tg^2 a \cdot tg^2 b \cdot tgc \leq 0$$

Subiectul II. (20 puncte)

$$A^{2015} \cdot B = O_n \Rightarrow A^{2015} \cdot B^{2015} = (AB)^{2015} = O_n \quad \text{(10 p)}$$

$$(I_n - AB) \left(I_n + AB + (AB)^2 + \dots + (AB)^{2014} \right) = I_n - (AB)^{2015} = I_n. \quad \text{Deci } I_n - AB \text{ este inversabilă.} \quad \text{(10 p)}$$

Subiectul III. (40 puncte)

a) Utilizăm criteriul Cesaro-Stolz, pt. $a_n = \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \dots + \frac{1}{n+2104}$ și $b_n = \ln(n+2015)$, $b_n \rightarrow \infty$, crescător. (*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2015}}{\ln\left(\frac{n+2016}{n+2015}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n+2015}\right)^{n+2015}} = \frac{1}{\ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+2015}\right)^{n+2015} \right]\right)} = \frac{1}{\ln e} = 1 \quad (* *)$$

Din (*), (**) $\xRightarrow{C.C.-S.} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$; **(20 p)**

b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + n} \quad \text{(10 p)} \quad b_n = 2n^2 + n \quad \text{(5 p)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n)^{b_n} = e \quad \text{(5 p)}$

Subiectul IV. (10 puncte)

Din relația de recurență rezultă că $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. **(2 p)**

Putem scrie: $|x_{n+1} - 4| = \left| (\sqrt{x_n + 45} - 7) - (\sqrt{x_n + 5} - 3) \right| \leq \left| \sqrt{x_n + 45} - 7 \right| + \left| \sqrt{x_n + 5} - 3 \right| =$

$$= \frac{|x_n - 4|}{\sqrt{x_n + 45} + 7} + \frac{|x_n - 4|}{\sqrt{x_n + 5} + 3} = |x_n - 4| \left(\frac{1}{\sqrt{x_n + 45} + 7} + \frac{1}{\sqrt{x_n + 5} + 3} \right) \leq |x_n - 4| \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{21} |x_n - 4| \quad \text{(5 p)}$$

Folosind inegalitatea obținută, avem succesiv: $|x_{n+1} - 4| \leq \frac{10}{21} |x_n - 4| \leq \left(\frac{10}{21} \right)^2 |x_{n-1} - 4| \leq \dots \leq \left(\frac{10}{21} \right)^{n+1} |x_0 - 4| \quad \text{(2 p)}$

Folosind criteriul majorării, din $|x_n - 4| \leq \left(\frac{10}{21} \right)^n |x_0 - 4|$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$. **(1 p)**

Barem clasa a XII-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (40 puncte)

- a) $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \Rightarrow A(x) \cdot A(y) \in G \Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor; (5 p)
 Înmulțirea în $M_3(R)$ este asociativă, deci și în G este asociativă; (5 p)
 $I_3 = A(0) \in G$ este elementul neutru pentru înmulțirea în G ; (5 p)
 $A(x) \cdot A(-x) = A(-x) \cdot A(x) = A(0) = I_3$, deci orice element din G este simetrizabil; (5 p)
 $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) = A(y+x) = A(y) \cdot A(x)$, deci înmulțirea în G este comutativă; (5 p)
- b) Fie funcția $f: G \rightarrow R, f(A(x)) = x$
 f bijectivă (5 p)
 $f(A(x)A(y)) = f(A(x+y)) = x+y = f(A(x)) + f(A(y))$, deci f este morfism de grupuri (5 p)
- c) $f(A^n) = f\left(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n\right) = f(A) + f(A) + \dots + f(A) = n \cdot f(A) = nx \Rightarrow A^n = f^{-1}(nx) = A(nx)$
 Atunci $A^{2015} = A(2015x)$. (5 p)

Subiectul II. (10 puncte)

Fie e elementul neutru al grupului G . Arătăm că $x \neq x^{-1}, \forall x \in G \setminus \{e\}$.
 Presupunem că $\exists x \in G \setminus \{e\}, x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = e \Rightarrow f(x) = e$, dar $f(e) = e \Rightarrow f(x) = f(e) \Rightarrow x = e$; Contrad.
 Deci $x \neq x^{-1}, \forall x \in G \setminus \{e\}$. Dacă grupăm elementele mulțimii $G \setminus \{e\}$ în perechi de forma (x, x^{-1}) observăm că $G \setminus \{e\}$ are un număr par de elemente, deci G va avea număr impar de elemente. (10 p)

Subiectul III. (20 puncte)

- a) Teorema de medie $\Rightarrow \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx = F(n) - F(1) = (n-1)f(x_n) = (n-1)x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n}, x_n \in (1, n)$ (5 p)
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n x \cdot \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (n-1)x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \underbrace{x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n}}_{x_n \rightarrow \infty \Rightarrow x_n \cdot \sin \frac{1}{x_n} \rightarrow 1} = 1$$
- (5 p)
- b) $e^{nx} \geq 1 + nx \Rightarrow nx \geq \ln(1 + nx) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) \leq \sum_{k=1}^n kx \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) \leq \frac{n(n+1)}{2} x \Rightarrow \int_0^1 \sum_{k=1}^n \ln(1 + kx) dx \leq \frac{n(n+1)}{4}$. (10 p)

Subiectul IV. (20 puncte)

$$F(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow e^{F(x)} \cdot f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow (e^{F(x)})' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Deci $e^{F(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} + C, F(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (10 p)