

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a IX-a

1. (a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, m număr par. Demonstrați că dacă $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$, atunci $\sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{mn}$.
- (b) Fie $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\sqrt{2} < a$. Demonstrați că există $a' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} < a' < a$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația

$$3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5.$$

Prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x .

3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 2$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două. Demonstrați că dacă

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n^2 + n + 2k}{2},$$

atunci printre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ există $n - k$ numere naturale consecutive.

4. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O și fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD , respectiv BCD . Fie L mijlocul laturii AB . Știind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL , arătați că $ABCD$ este trapez isoscel.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.