Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a 3-a - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XII-a

Problema 1.

Determinaţi funcţiile continue $f:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ care verifică relaţia

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\dots\cdot\int_0^1 f^{2020}(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int_0^1 f^{2021}(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1010}.$$

Problema 2.

Să se determine inelele nenule finite, cu unitate, în care suma tuturor elementelor este un element inversabil.

Problema 3.

Fie $a\in\mathbb{N}$, $a>2$. Să se arate că

a) Există un număr $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, care nu este prim, astfel încât $a^n\equiv 1 \pmod{n}$.

b) Dacă p este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ pentru care $a^p\equiv 1 \pmod{p}$, atunci p este prim.

c) Nu există numere $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ pentru care $2^n\equiv 1 \pmod{n}$.

Problema 4.

Fie $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că $f(0)=0$. Arătaţi că pentru orice $\alpha\geq 0$ are loc inegalitatea

$$(\alpha+2)\cdot\int_0^1 x^\alpha\left(f(x)+f^{-1}(x)\right)\,\mathrm{d}x\leq 2\,.$$

Timp de lucru: 180 *de minute. Fiecare problemă valorează* 7 *puncte.*