



S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică

Faza locală 13.02.2015

Rezolvare. Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Să se calculeze A^n și $\det(A^n)$, unde n este un număr natural nenul.

Soluție

Calculând A^2 , A^3 , A^4 se observă că elementele de pe diagonala principală rămân aceleași egale între ele cât și elementele de deasupra și dedesubtul diagonalei principale. Atunci,

folosind metoda cu șiruri avem $A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

Din $A^{n+1} = A^n A$ obținem relațiile $a_{n+1} = 2b_n$ și $b_{n+1} = a_n + b_n$ care conduc la recurența liniară $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ cu $a_1 = 0$ și $a_2 = 2$ (4 puncte)

Găsim $a_n = \frac{1}{3} [2^n + 2(-1)^n]$ și $b_n = \frac{1}{3} [2^n - (-1)^n]$ (2 puncte)

Avem relația $\det(A^n) = (\det A)^n = 2^n$ (1 punct)

SUBIECTUL II Se consideră matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiție trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + \dots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A ?$$

Soluție. Pentru $k = 1 \Rightarrow B = I_n + A$

3p

Pentru $k = 2 \Rightarrow B + B^2 = 2I_n + 3A$

$$B + B^2 = 2I_n + 3A + A^2, \text{ deci } A^2 = O_n \Rightarrow A^m = O_n, \forall m \geq 2, m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow B^m = (I_n + A)^m = I_n + mA \text{ de unde relația.}$$

2p

În concluzie $A^2 = O_n$

2p



SUBIECTUL III Se consideră șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ cu $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$. Arătați că $(u_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

Supliment Gazeta Matematică

Soluție.

Șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător (demonstrație prin inducție)..... (2p)

Șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, și anume $u_n \in \left[\frac{11}{4}, 4\right]$, $\forall n \geq 1$ (demonstrație prin inducție). (2p)

Deci șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Fie

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

Trecând la limită în relația de recurență se obține $l_1 = 4$ și $l_2 = 2 \notin \left[\frac{11}{4}, 4\right]$ deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 4. \quad (3p)$$

SUBIECTUL IV Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $\forall n \geq 1$ și $x_0 \in \mathbb{R}$.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

Soluție. Din $x_{n+1} - x_n = e^{-x_n} > 0$, $\forall n \geq 1$ rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător..... (1 punct)

Dacă ar fi mărginit, șirul ar avea limită finită $l \in \mathbb{R}$. Trecând la limită în relația de recurență obținem $e^{-l} = 0$, fals. Deci, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (1 punct)

Aplicăm lema lui Stolz-Cesaro și avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x_n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_{n+1} - x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n(e^{x_{n+1} - x_n} - 1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n(x_{n+1} - x_n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x_n e^{-x_n}}} = 1 \dots \dots \dots (5 \text{ puncte}) \end{aligned}$$

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem