

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie $G_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbf{Z}_p \right\}$ unde $p \geq 3$ este un număr natural impar.

- a) Arătați că oricare ar fi $A, B \in G_p$ avem că $AB \in G_p$.
- b) Arătați că $(G_p, \cdot)$ este un grup necomutativ, unde operația este înmulțirea matricelor.

Arătați că p este prim dacă și numai dacă $\text{ord}(A) = p$ pentru orice matrice $A \in G_p$, $A \neq I$ unde

$$I = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

* * *

SUBIECTUL II

Fie $(G_1, \cdot)$ și $(G_2, \cdot)$ două grupuri. Pe mulțimea $G_1 \times G_2$ definim operația " $\cdot$ " prin

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$, $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$ (produsul direct). Presupunem cunoscut faptul că $(G_1 \times G_2, \cdot)$ este un grup.

Arătați că:

- a) $(\mathbf{C}, +)$ este izomorf cu $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \cdot)$
- b) $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ nu este izomorf cu $(\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*, \cdot)$

Nelu Chichirim

SUBIECTUL III

Calculați $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$.

Cătălin Zîrnă

SUBIECTUL IV

Se consideră integralele $I_n = \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx dx$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- a) Calculați I_2 și I_3 .
- b) Arătați că $I_n \neq 0$ dacă și numai dacă n este de forma $4k-1$ sau $4k$, $k \in \mathbf{N}^*$.
- c) Fie $A_n = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid I_n \neq 0\}$ și a_n numărul de elemente ale mulțimii A_n . Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

* * *

Notă:

Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu