

Soluție:

a) Se pornește de la observația că, pentru o sarcină punctiformă, câmpul are simetrie sferică și de la proprietatea că liniile de câmp electric nu se intersectează în punctele în care nu există sarcini electrice. De asemenea, trebuie observat că în sisteme de sarcini punctiforme, câmpul fiecărei sarcini își păstrează simetria sferică în imediata apropiere a sarcinilor, unde câmpul creat de către celelalte sarcini este neglijabil (se știe că atunci când distanța dintre sarcini tinde la zero, câmpul sarcinii punctiforme tinde la infinit). Aceste observații, împreună cu teorema lui Gauss, ne conduc la proprietatea că putem exprima fluxul printr-o suprafață Σ care se vede din sarcina punctiformă Q sub un unghi solid Ω sub forma (vezi figura):

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

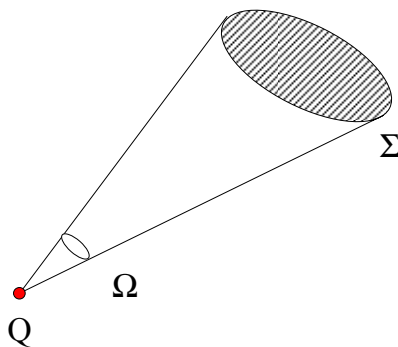


Fig. 1 Fluxul prin suprafața Σ

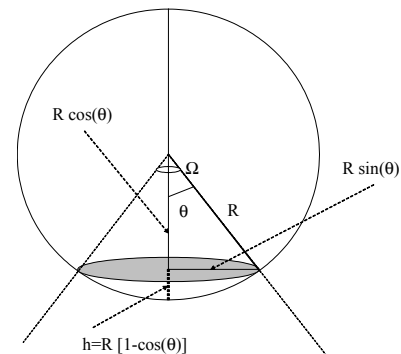


Fig.2 Unghiul solid al unui con având semi-unghiul la vârf θ

Un alt rezultat de care avem nevoie în calcul este unghiul solid al deschiderii unui con având semi-unghiul la vârf θ , și anume:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta).$$

În condițiile enunțate anterior, putem afirma că TOATE liniile de câmp care pornesc din A sub un unghi $\theta \geq \theta_{a0}$ ajung în punctul B sub un unghi $\theta \leq \theta_{b0}$. Egalând fluxurile:

$$\Phi_A = \frac{|q_a|}{\epsilon_0} \frac{2\pi[1 - \cos(\pi - \theta_{a0})]}{4\pi}$$

și

$$\Phi_B = \frac{|q_b|}{\epsilon_0} \frac{2\pi[1 - \cos(\theta_{b0})]}{4\pi}$$

și făcând simplificări, obținem:

$$|q_a|[1 - \cos(\pi - \theta_{a0})] = |q_b|[1 - \cos(\theta_{b0})] \Rightarrow \cos(\theta_{b0}) = 1 - \frac{|q_a|}{|q_b|}(1 + \cos(\theta_{a0}))$$

sau, dacă notăm cu

$$\alpha = \frac{|q_a|}{|q_b|} = -\frac{q_a}{q_b}$$

obținem:

$$\cos(\theta_{b0}) = 1 - \alpha(1 + \cos(\theta_{a0})). \quad (1)$$

b) Din relația (1), pentru a putea obține o valoare pentru unghiul θ_{b0} trebuie să impunem ca membrul drept din (1) să fie cuprins în intervalul $[-1, +1]$, adică:

$$-1 \leq [1 - \alpha(1 + \cos(\theta_{a0}))] \leq 1,$$

ceea ce indică posibilitatea ca doar pentru anumite valori ale unghiului θ_{a0} liniile de câmp care pornesc din A ajung în B. Să analizăm restricțiile introduse de condiția anterioară pentru θ_{a0} .

Din:

$$[1 - \alpha(1 + \cos(\theta_{a0}))] \leq 1$$

rezultă succesiv:

$$-\alpha(1 + \cos(\theta_{a0})) \leq 0 \Rightarrow \cos(\theta_{a0}) \geq -1.$$

condiție valabilă pentru orice unghi θ_{a0} .

Din

$$-1 \leq [1 - \alpha(1 + \cos(\theta_{a0}))]$$

rezultă succesiv:

$$-2 \leq -\alpha(1 + \cos(\theta_{a0})) \Rightarrow 2 \geq \alpha(1 + \cos(\theta_{a0})) \Rightarrow 1 + \cos(\theta_{a0}) \leq \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \cos(\theta_{a0}) \leq \frac{2}{\alpha} - 1$$

condiție care trebuie analizată pentru $\alpha \in [0, 1)$ și $\alpha \geq 1$, respectiv.

Dacă $\alpha \in [0, 1)$, atunci $\frac{2}{\alpha} > 2$ și condiția care rezultă pentru θ_{a0} este banală, adică,

$$\cos(\theta_{a0}) < 1.$$

Dacă însă $\alpha \geq 1$, parametrul $\xi = \frac{2}{\alpha} - 1$ poate lua valori în intervalul $[-1, 1]$, ceea ce indică pentru fiecare valoare a lui α o restricție de forma:

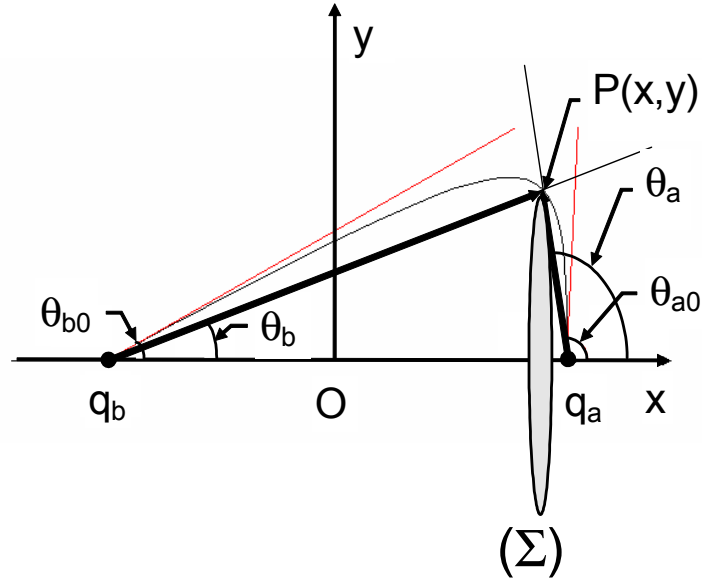
$$\cos(\theta_{a0}) \leq \xi \Rightarrow \theta_{a0} \geq \theta_{al} = \arccos(\xi) = \arccos\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right).$$

Discuția din ultimele paragrafe are ca bază fizică faptul că atunci când $\alpha \in [0, 1)$ (adică sarcina q_a este în modul mai mică decât sarcina q_b) toate liniile de câmp care pleacă din A se închid pe B, adică $\theta_{al} = 0$.

Dacă însă sarcina q_a este în modul mai mare decât sarcina q_b atunci doar o parte dintre liniile de câmp care pleacă din A ajung în B, adică cele care pleacă din A sub un unghi mai mare decât

$$\theta_{al} = \arccos(\xi) = \arccos\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right).$$

c)



Pentru a determina ecuația liniilor de câmp pornim de la observația făcută și la punctul a) privind faptul că toate liniile de câmp care pornesc din A sub un unghi $\theta \geq \theta_{a0}$ ajung în punctul B sub un unghi $\theta \leq \theta_{b0}$. Se consideră un punct P oarecare pe linia de câmp care pornește din A sub unghiul θ_{a0} . Ținând cont de simetria axială a problemei putem roti linia de câmp în jurul axei Ox și obținem o suprafață formată din linii de câmp similare celei menționate. Se intersectează această suprafață cu un plan perpendicular pe axa Ox, care trece prin punctul P. Intersecția planului cu suprafața este un disc. Indiferent de poziția punctului P pe linia de câmp fluxul prin discul care trece prin P va fi același. Folosim această proprietate pentru a găsi ecuația liniei de câmp.

Fluxul prin disc îl putem calcula folosind principiul superpoziției, ca fiind suma algebrică (ținând cont de sensul liniilor de câmp și considerând că normala la suprafața discului este în sensul axei Ox) a fluxurilor create de fiecare dintre cele două sarcini:

$$\Phi = -\frac{q_a}{\epsilon_0} \frac{2\pi(1 - \cos(\pi - \theta_a))}{4\pi} + \frac{q_b}{\epsilon_0} \frac{2\pi(1 - \cos(\theta_b))}{4\pi}.$$

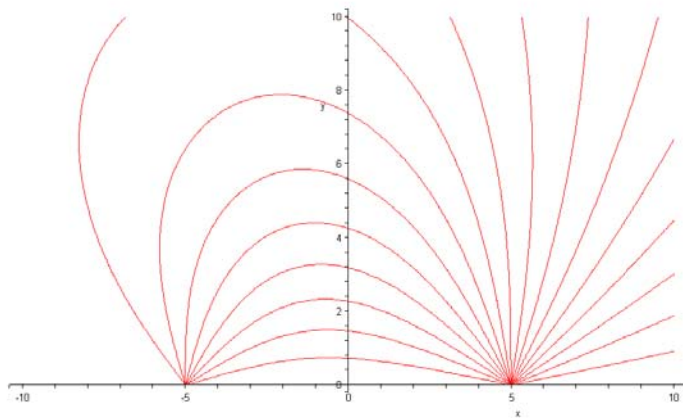
Din condiția de flux constant se obține imediat ecuația liniei de câmp sub forma:

$$q_a \cos(\theta_a) + q_b \cos(\theta_b) = \text{const.}$$

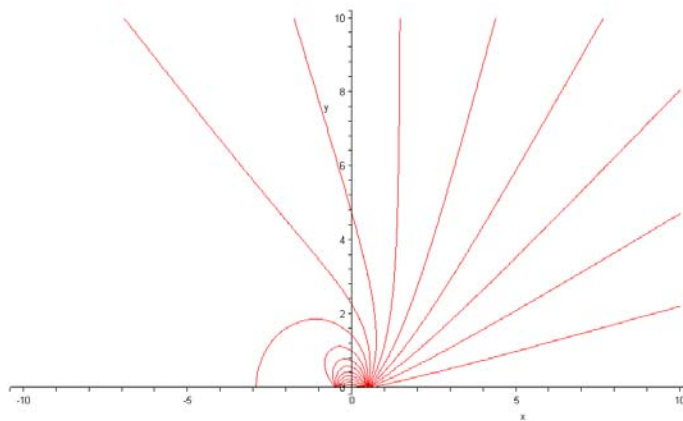
sau exprimat în coordonate carteziene:

$$q_a \frac{\left(x - \frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} + q_b \frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} = \text{const.}$$

e)



Aproape de sistem

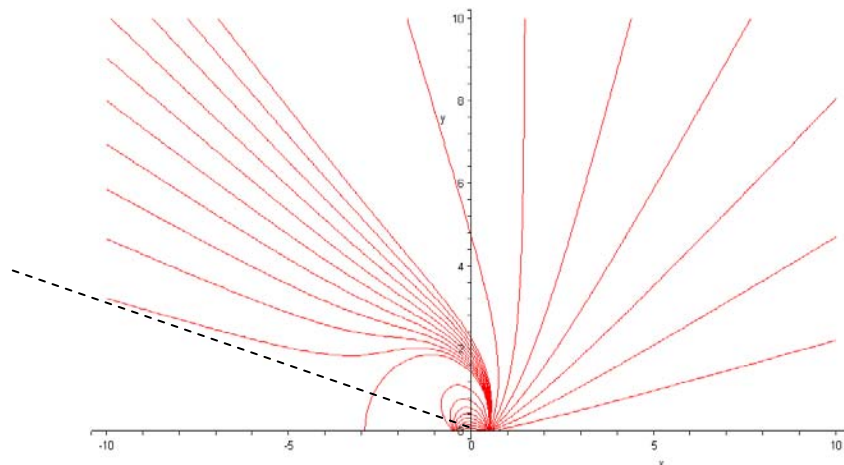


Departe de sistem

Unghiul limită este:

$$\alpha = 2; \theta_{al} = \arccos\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Liniile de câmp care nu se închid pe sarcina din punctul B se închid la infinit. Aceste linii de câmp tind asimptotic la liniile unei sarcini punctiforme $q_t = q_a + q_b = -2q_b + q_b = -q_b$. Vezi figurile.



Soluție la „Călătorii și războaie”

A.1 La distanța r de centrul Pământului de rază a și masă M_P

$$mg(r) = k \frac{M(r) \cdot m}{r^2} = k \frac{m}{r^2} \cdot \frac{4\pi r^3 \rho}{3} = mg \frac{r}{a} \quad (1)$$

unde g este accelerația gravitațională la suprafața Pământului. Ecuația de mișcare a corpului care cade, la distanța r de centrul Pământului este:

$$m\ddot{r} = -mg \frac{r}{a} \quad (2)$$

sau

$$m\ddot{r} + mg \frac{r}{a} = 0 \quad (3)$$

Cu notația $\frac{g}{a} = \omega^2 > 0$, ecuația devine:

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \quad (4)$$

A.2 Relația(4) este o ecuație de oscilator armonic cu soluția

$$r(t) = A \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (5)$$

A.3 Frecvența de oscilație ω este dată de

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{g}{a} \quad (6)$$

Perioada mișcării este

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{a} \quad (7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (8)$$

Timpu l călătoriei este:

$$\frac{T}{2} \cong 40 \text{ min}$$

A.4 Vehiculul este în cădere liberă, deci călătorii sunt în imponderabilitate

A.5 Întrucât legea de mișcare este oscilatorie armonică, viteza va fi:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

Deoarece la momentul inițial

$$\begin{aligned} r(0) &= 0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$r(0) = A \sin \varphi = a$$

$$v(0) = A \omega \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

$$r(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

$$v(t) = a \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (13)$$

$$v_{\max} = a \omega \quad (14)$$

$$v_{\max} = \sqrt{ga} \quad (15)$$

$$v_{\max} \cong 8000 \text{ m/s} \quad (16)$$

B.1 La avion ajung o undă directă provenită direct de la antenă și o undă reflectată de către apă. Situația este similară celei care apare la oglinda Lloyd. Prin interferența celor două unde, în punctul din spațiu în care se află avionul pot rezulta diverse intensități ale radiației receptate.

B.2 Pentru avionul aflat la înălțimea h față de nivelul mării și la distanța d pe orizontală față de antenna, drumurile optice ale celor două unde sunt:

$$\delta_1^2 = d^2 + (H - h)^2 \quad (1)$$

$$\delta_2^2 = d^2 + (H + h)^2 \quad (2)$$

Deoarece $H+h \ll d$ radicalii care exprimă lungimile drumurilor optice se pot aproxima prin:

$$\delta_1 = d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H - h}{d} \right)^2 \right] \quad (3)$$

$$\delta_2 = d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H + h}{d} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Diferența de drum optic pentru cele două raze este:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 + \frac{\lambda}{2} = \frac{2Hh}{d} + \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

Întrucât în apropierea suprafeței apei diferența drumurilor geometrice este nulă, diferența drumurilor este o semiundă și intensitatea rezultată în urma interferenței este nulă. Aceasta explică de ce semnalul are intensitate scăzută în apropierea suprafeței mării.

Pentru obținerea maximelor de interferență este necesară respectarea condiției

$$\delta_{\max} = \frac{2Hh}{d} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (6)$$

Aceste maxime se realizează atunci când avionul se află la înălțimi

$$h_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda d}{2H} \quad (7)$$

sau

$$h_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot 250 \text{ m} \quad (8)$$

Primele astfel de înălțimi sunt:

$$h_0 = 125 \text{ m}$$

$$h_1 = 375m$$

.....

B.3 Maximizarea semnalului radio permite determinarea extreme de precisă a înălțimii de zbor , obligatorie în misiunile de bombardament

Prof. Constantin TRĂISTARU, MEC, Prof. dr. Ștefan ANTOHE , Conf. dr. Adrian DAFINEI, Facultatea de Fizică a Universității din București

Rezolvare la : Filamente incandescente și corpuri călduțe

A.1

Drumul liber mediu λ se corelează cu concentrația de particule, n și cu secțiunea eficace a acestora, S , conform relației

$$\lambda = \frac{1}{nS} \quad (1)$$

Din legea gazelor,

$$\begin{cases} P \cdot V = \nu RT \\ P \cdot V = \frac{N}{N_A} RT \end{cases} \quad (2)$$

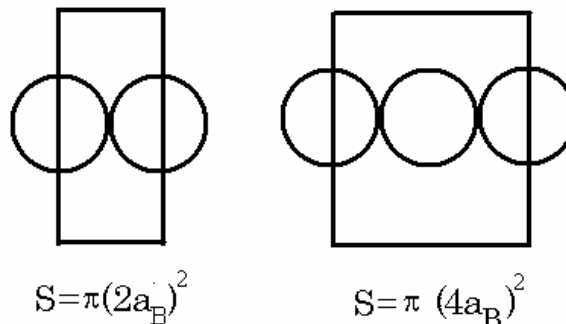
(unde N este numărul de particule din sistem) rezultă pentru concentrație expresia

$$n = \frac{N}{V} = \frac{P \cdot N_A}{RT} \quad (3)$$

Secțiunea eficace este un cerc cu raza R

$$R = 4a_B \quad (4)$$

Este admisă ca fiind corectă orice rază $R \in (2a_B, 4a_B)$ - ca în desenul de mai jos



Cu datele furnizate în problemă, orice drum liber apărut dintr-un raționament corect și având valoarea $\lambda = 2 \div 8m$

(5)

este corect.

Ținând cont de volumul vasului, cu dimensiune lineară acceptabilă de tipul $0,1m$ rezultă că toți atomii disociați apăruiți la filament, se duc spre perete unde se lipesc fără a întâlni pe drum o altă particulă. Din acest fapt rezultă două concluzii foarte importante

- Temperatura gazului din incintă rămâne constantă deoarece atomii „fierbinți” nu disipă energie către ceilalți atomi din incintă
- Procesul de „condensare” a atomilor pe pereți este limitat de generarea de atomi deoarece orice atom generat ajunge sigur la perete unde „dispare” din punctul de vedere al concentrației de gaz din vas

A.2 O fracțiune f din numărul moleculelor (care au în incintă viteza $\bar{v}$) și se află într-un paralelipiped cu aria bazei A egală cu aria filamentului și cu înălțimea $\bar{v} \cdot \tau$ ajung la filament unde se disociază și pleacă apoi spre pereți. Numărul lor, N_f , este deci

$$N_f = f \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \tau \cdot n \quad (6)$$

$$\frac{d(nV)}{d\tau} = -f \cdot A \cdot \bar{v} \cdot n \cdot \tau \quad (7)$$

Variația concentrației de particule din incintă respectă prin urmare relația

$$\frac{dn}{n} = -\frac{A}{V} f \cdot \bar{v} \cdot d\tau \quad (8)$$

sau

$$\ln \frac{n}{n_0} = -\frac{A}{V} \cdot f \cdot \bar{v} \cdot \tau \quad (9)$$

Orice f din domeniul

$$f = \frac{1}{6} \div \frac{1}{3} \quad (10)$$

Va fi considerat corect – dacă este rezultatul unui raționament corect referitor la geometria filamentului în vas.

Deoarece presiunea este proporțională cu concentrația, din (9) rezultă

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{A}{V} f \cdot \bar{v} \cdot \tau \quad (11)$$

A.3 Viteza luată în considerare este viteza medie

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \quad (12)$$

Este admisă ca fiind corectă și viteza termică

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (13)$$

Valoarea numerică $v = 270m/s$ cu eroare de 10% este acceptată ca fiind corectă.

Din relația (11) rezultă că timpul τ la care se realizează presiunea p este

$$\tau = \frac{\ln \frac{p_0}{p}}{\frac{A}{V} f \cdot \bar{v}} \quad (14)$$

Orice valoare a timpul în care presiunea din vas scade de 1000 de ori, cuprinsă în intervalul (0,1s , 1s) este considerată corectă.

B. În general, energia primită de sistemul aflat la temperatura T în intervalul de timp $\Delta\tau$,

$$E_{primit} = P_{primit} \cdot \Delta\tau \quad (1)$$

este folosită parțial pentru ridicarea cu ΔT a temperaturii sistemului care are capacitatea calorică C și parțial se pierde sub forma

$$E_{cedat} = P_{cedat} \cdot \Delta\tau \quad (2)$$

Ecuția care descrie procesul este

$$P_{primit} \cdot \Delta\tau = C \cdot \Delta T + P_{cedat} \cdot \Delta\tau \quad (3)$$

$$\text{sau } P_{primit} = C \cdot \frac{\Delta T}{\Delta\tau} + P_{cedat} \quad (4)$$

La stare staționară,

$$P_{primit} = P_{cedat} \quad (5)$$

iar pentru obiectul care se răcește,

$$0 = C \cdot \frac{\Delta T}{\Delta\tau} + P_{cedat} \quad (6)$$

1. Graficul este calitativ; viteza de încălzire este mare la început și tinde spre zero pe măsură ce corpul se îndreaptă spre starea de echilibru la care puterea primită și aceea pierdută sunt egale.

2. Viteza de răcire se poate tabela sub forma

Timp(s)	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Temp($^{\circ}\text{C}$)	40,00	35,74	32,39	29,76	27,68	26,05	24,74	23,75	22,95	22,32	21,83
$\Delta T / \Delta \tau$		8,52	6,70	5,26	4,16	3,26	2,62	1,98	1,60	1,26	0,98

Pe linia a treia, vitezele de răcire trebuie citite ca fiind - de exemplu - $8,52 \times 10^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C} / \text{s}$. Dependența arată scăderea vitezei de răcire pe măsura scăderii temperaturii.

3. Se pot reprezenta pe același grafic vitezele de variație ale temperaturilor ca funcție de temperatură și puterile ca funcție de temperatură - pentru temperaturile la care există toate aceste date.

Tabelul respectiv este prezentat mai jos. În ultima coloană a tabelului apare valoarea capacității calorice a sistemului

T	$\Delta T / \Delta \tau$	$P_{\text{primit}} = P_{\text{cedat}}$	$C [J / ^{\circ}\text{C}]$
25	0,026	1	38
30	0,046	2	43,5
35	0,072	3	41,6
40	0,097	4	41

Valoarea medie pentru capacitate calorică este de $41 J / ^{\circ}\text{C}$. Corespunzător, valoarea căldurii specifice a obiectului omogen cu masa de 100g este

$$c = 410 J / \text{kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$\text{C. } \eta = \frac{L}{Q_p}, \quad L = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V \text{ este fixat.}$$

η este maxim când Q_p este minim.

Avem:

$$Q_p = \nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2)$$

$$T_1 = \frac{p_0 V_0}{\nu R}, \quad T_2 = \frac{(p_0 + \Delta p) V_0}{\nu R}, \quad T_3 = \frac{(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)}{\nu R}$$

Astfel:

$$T_2 - T_1 = \frac{V_0 \Delta p}{\nu R}, \quad T_3 - T_2 = \frac{p_0 \Delta V + \Delta p \Delta V}{\nu R} \text{ și}$$

$$Q_p = \frac{C_V}{R} V_0 \Delta p + \frac{C_p}{R} (p_0 \Delta V + \Delta p \Delta V)$$

Care este minim când $V_0 \rightarrow 0$ și $p_0 \rightarrow 0$, adică:

$$Q_p^{(\min)} = \frac{C_p}{R} \Delta p \Delta V = \frac{C_p}{R} 2L.$$

În final

$$\eta_{\max} = \frac{R}{2C_p} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$

Prof. dr. Florea ULIU, Dr. Constantin COREGA ISJ Cluj, Dr. Romulus POP, MEC, Dr. Adrian S. Dafinei,
Universitatea din București



Ministerul Educației și Cercetării
Olimpiada Națională de Fizică
Iași, 20-25 martie 2005

**BARAJ
FIZICA**

PROBLEMA DE MECANICA

REZOLVARE

a) După un timp t , când elongația caruciorului este $\vec{x}$, iar deplasările capetelor laterale ale celor două cabluri sunt egale, $\Delta L = vt$, modulele celor două forțe elastice care acționează asupra caruciorului, sunt:

$$F_{e1} = k(\Delta L - x); F_{e2} = k(\Delta L + x) > F_{e1},$$

orientările lor fiind opuse, astfel încât rezultanta lor va fi:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{e1} + \vec{F}_{e2} = -2k\vec{x},$$

evidențiind mișcarea oscilatorie armonică a caruciorului, echivalentă cu mișcarea oscilatorie armonică a aceluiași carucior conectat cu un singur cablu elastic (care ramne liniar pe toată durata oscilațiilor), având constanta de elasticitate $2k$:

$$\vec{F}_e = m\vec{a}; m\vec{a} = 2k\vec{x} = 0; \vec{a} + \frac{2k}{m}\vec{x} = 0; \omega^2 = \frac{2k}{m}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}};$$

$$V = v_0 \cos \omega t; x = x_{\max} \sin \omega t; v_0 = \omega x_{\max}; x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t; a = -a_{\max} \sin \omega t = -v_0 \omega \sin \omega t.$$

b) În raport cu un sistem de referință mobil, care se deplasează constantă $\vec{v}/2$, capetele laterale ale cablurilor se deplasează uniform, în sensuri opuse, departându-se cu viteze egale, $v/2$, iar la momentul inițial viteza caruciorului, cu modulul $v/2$, este orientată spre stnga.

Concluzie: în noile condiții, evoluția sistemului raportată la sistemul mobil, este identică cu evoluția sistemului analizat anterior.

Datorită orientării vitezei sale inițiale în raport cu sistemul mobil, la un moment ulterior, t , caruciorul se va afla în punctul de coordonată $x < 0$, când deplasările capetelor laterale ale cablurilor sunt egale, $\Delta L = vt/2$, astfel încât modulele forțelor elastice care acționează asupra caruciorului sunt:

$$F_{e1} = k(\Delta L - x); F_{e2} = k(\Delta L + x) < F_{e1},$$

rezultanta lor având modulul:

$$F_e = F_{e1} - F_{e2} = -2kx > 0,$$

orientarea sa fiind spre dreapta, ceea ce justifică mișcarea relativă oscilatorie armonică a caruciorului, pentru care avem:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}; x = -x_{\max} \sin \omega t = -\frac{v}{2\omega} \sin \omega t.$$

In aceste conditii, alungirile efective (absolute) instantanee ale celor doua cabluri, sunt:

$$\Delta l_1 = \Delta L - x = \frac{v}{2}t + \frac{v}{2\omega} \sin \omega t;$$

$$\Delta l_2 = \Delta L + x = \frac{v}{2}t - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t,$$

relatia intre Δl_1 si Δl_2 depinzand de momentul t al evolutiei sistemului.

Observatie: alungirile Δl_1 si Δl_2 au aceleasi valori in raport cu ambele sisteme de referinta.

Fiind cunoscuta variatia semnelui functiei $\sin \omega t$, rezulta:

- in semiperioadele impare, cand $\sin \omega t > 0$, cablul 1 este mai intins dect cblul 2;

$$\Delta l_1 > \Delta l_2; 2n\frac{T}{2} < t < (2n+1)\frac{T}{2}; n = 0,1,2,...;$$

- in semiperioadele pare, cand $\sin \omega t < 0$, cablul 2 este mai intins decat cablul 1;

$$\Delta l_2 > \Delta l_1; (2n+1)\frac{T}{2} < t < (2n+2)\frac{T}{2}; n = 0,1,2,.....$$

Alungirile absolute ale celor doua cabluri depind de v (directa proportionalitate), de momentul t din evolutia istemului (proportionalitate) si de aoartennta lui t la o semiperioada para sau impara a oscilatiilor.

Cumuland toate aceste dependente, putem afirma ca se va rupe acel cablu pentru care se indeplineste mai repede conditia critica: $\Delta l = \Delta l_{crt}$.

Daca cel rupt va fi cablul 1, atunci evenimentul s-a petrecut intr-un moment apartinand unei semiperioade impare si reciproc.

Intr-adevar, corespunzator acestor semiperioade, avem:

$$2n\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta L < (2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\Delta L = \Delta l_{crt} - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t > 0;$$

$$2n\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta l_{cr} - \frac{v}{2\omega} \sin \omega t < (2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi v}{2\xi \Delta l_{cr}} < \frac{1}{2n};$$

$$n = 1; \frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{2} \frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi};$$

$$n = 2; \frac{1}{5} \frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{4} \frac{2\omega \Delta l_{cr}}{\pi}.$$

Daca se va rupe cblul 2, atunci evenimentul s-a petrecut intr-un moment apartinand unei semiperioade pare si reciproc.

Intr-adevar, corespunztor semiperioadlor pare, avem:

$$(2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta L < (2n+2)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{cr}; \quad \Delta L = \Delta l_{cr} + \frac{v}{2\omega} s\omega t; \sin \omega t < 0;$$

$$(2n+1)\frac{T}{2}\frac{v}{2} < \Delta l_{cr} < (2n+2)\frac{T}{2}\frac{v}{2};$$

$$n=1; \frac{1}{4}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{3}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi};$$

$$n=2; \frac{1}{6}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi} < v < \frac{1}{5}\frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi}.$$

Pentru valori mari ale vitezei cu care se deplaseaza omul, conditia critica est indeplinita de cablul 1 chiar din prim semiperioada, astfel incat, daca:

$$v > \frac{2\omega\Delta l_{cr}}{\pi},$$

se va rupe cablul 1.

c) In momentul liniarizarii orizontale a cablului, tensiunea din el este nula (cablul nu est deformat), iar viteza relativa a vagonetului fata de om est $-\vec{v}_0$.

Din acest moment, miscarea vagonetului raportata la sistemul de referinta solidar cu omul est o miscare oscilatorie armonica, debutul sau insemnand trecerea oscilatorului (vagonetului) prin pozitia de echilibru cu viteza $-\vec{v}_0$, departandu-se de originea sistemului de referinta ales (omul).

Caracterul miscarii vagonetului fata de om se va mentine pana in momentul in care vagonetul va reveni in aceeasi pozitie fata de om, dar cu viteza relativa $\vec{v}_0$, cablul fiind din nou ne deformat.

Corespunzator acestui moment, viteza vagonetului fata de sol va fi $2\vec{v}_0$ si va ramane asa deoarece cablul nu se va putea comprima, el asternandu-se si tarandu-se pe sol, fiind tras de carucior.

In aceste conditii, vagonetul il va prinde din urma pe om, il va izbi din spate si il va prelua, astfel inat, in acord cu legea conservarii impulsului, avem:

$$2\vec{v}_0 M + m\vec{v}_0 = (M + m)\vec{u};$$

$$(2M + m)v_0 = (M + m)u;$$

$$\frac{M}{m} = \frac{u - v_0}{2v_0 - u},$$

unde M – masa vagonetului si m – masa omului.

Durata actiunii omului asupra vagonetului est egala cu durata miscarii oscilatorii armonice pe care vagonetul o efectueaza in raport cu omul, adica:

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{M}{k}},$$

adica timpul cat cablul de legatura a stt tensionat est jumatate din perioada oscilatiilor armonice pe care le-ar efectua vagonetul cand cablul, inlocuit cu un resort elastic, ar putea ramane orizontal liniar.

Corespunzator unui moment, cand, in raport cu sistemul de referinta atasat omului, vagonetul se departeaza si de om si d pozitia sa de echilibru, viteza vagonetului in raport cu solul est:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_0 + \vec{v};$$

$$v_s = v_0 - v = v_0(1 - \cos \omega t),$$

astfel incat, in acest moment, energia mecanica totala a sistemului vagonet-cablu, este:

$$E = \frac{Mv_s^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

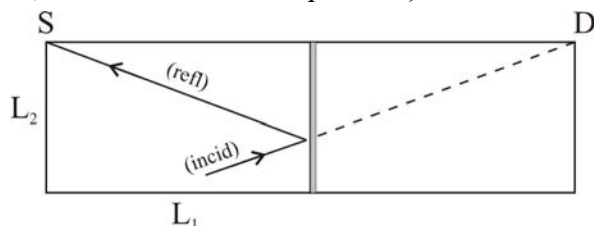
$$E = \frac{Mv_0^2}{2}(1 - \cos \omega t)^2 + \frac{kv_0^2}{2}\sin^2 \omega t;$$

Ca urmare, lucrul mecanic efectuat de om pentru deplasarea vagonetului in timpul $t = \tau/4$, cronometrat din momentul tensionarii cablului, este:

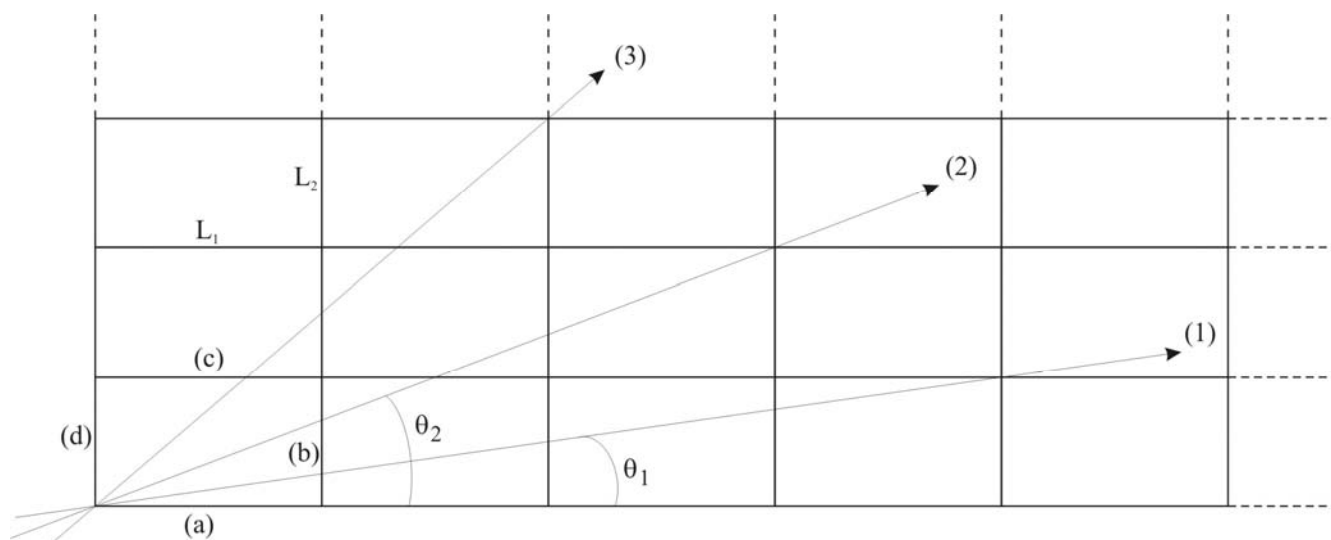
$$L = E = Mv_0^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

PROBLEMA DE OPTICA
REZOLVARE

A. Soluția problemei se bazează pe următoarea observație: raza reflectată de o oglindă plană este simetrică față de planul oglinzii cu prelungirea razei incidente. Dacă prelungirea punctată a razei incidente trece prin colțul D, raza reflectată trece prin colțul S.



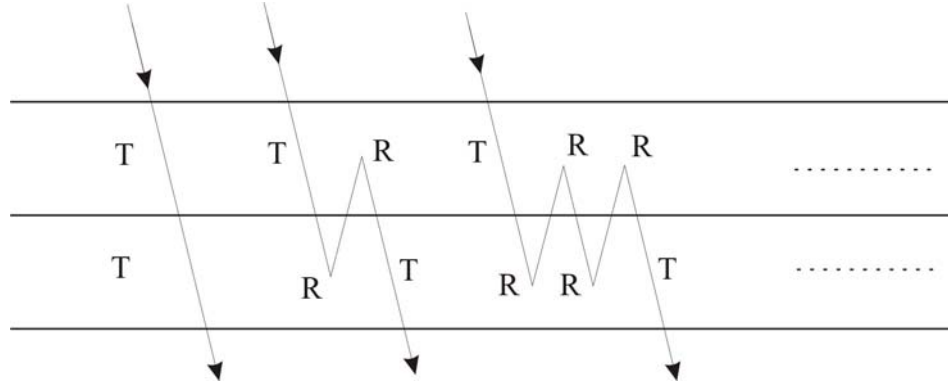
Să construim mai multe celule (cutii) ca cele din desenul anterior, atât spre dreapta, cât și în sus. Considerăm două raze, 1 și 2, care prelungite trec printr-un colț de celulă. Acest fapt ne arată că la un moment dat ele ies din interiorul cutiei și anume:



- raza 1 iese după trei reflexii consecutive pe oglinzile b, d și din nou b, după care iese prin colțul c-d;
- raza 2 iese tot după trei reflexii succesive pe oglinzile b, c și d, după care iese prin colțul a-b.

Se pot analiza în acest mod și alte situații, din care rezultă că $\tan \alpha = \frac{nL_2}{mL_1}$, cu n și m numere întregi.

B. a) Pe baza desenului putem scrie:



$$T_2 = TT + TRRT + TRRRRR + \dots =$$

$$= T^2 (1 + R^2 + R^4 + R^6 + \dots) = T^2 \frac{1}{1 - R^2} = \frac{1 - R}{1 + R}.$$

În consecință $R_2 = 1 - T_2 = \frac{2R}{1 + R}$. Graficul reflectanței R_2 în funcție de R este monoton crescător, pornind din $(0,0)$ sub un unghi de $63,435^\circ$ și ajungând în punctul $(1,1)$, cu o tangentă aproape orizontală.

b) Pentru n folii prin generalizarea rezultatului anterior putem scrie $R_n = \frac{nR}{1 + (n-1)R}$.

Formula se poate deduce prin inducție, considerând un sistem de $n+1$ folii ca un sistem de n folii și încă o folie. Astfel avem

$$T_{n+1} = T_n T + T_n R R_n T + \dots = T_n T \frac{1}{1 - R R_n}.$$

O inversăm ținând cont că $R_n = 1 - T_n$ și obținem recurența:

$$\frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{T_n} + \frac{1}{T} - 1.$$

Aplicând aceasta formulă din aproape în aproape obținem:

$$\frac{1}{T_{n+1}} = \frac{n+1}{T} - n.$$

Inversăm această formulă pentru n trecut în $n-1$ și găsim $T_n = \frac{T}{n - (n-1)T}$. Acum

relația $R_n = 1 - T_n$ ne dă $R_n = \frac{nR}{1 + (n-1)R}$. În aplicația numerică $\frac{10R}{9R+1} = 0,97$.

C. a) Fie I_s intensitatea luminii solare incidente. Utilizăm legea lui Malus și ținem cont că în cazul luminii naturale media lui $\cos^2 \theta$ este egală cu $\frac{1}{2}$. Așa dar, intensitatea ce trece dincolo de primul polarizor este $I_1 = f_1 I_s = \frac{1}{2} T I_s$. De aici $T = 2f_1$. În cazul când cei doi polarizori sunt așezați unul după altul, iar unghiul dintre direcțiile lor de transmisie este α putem scrie

$$I_2 = T(I_1 \cos^2 \alpha) = 2f_1^2 I_s \cos^2 \alpha = f_2 I_s. \text{ De aici rezultă } \cos \alpha = \sqrt{\frac{f_2}{2f_1^2}} = \frac{1}{f_1} \sqrt{\frac{f_2}{2}}.$$

b) Este necesar ca $f_2 < 2f_1^2$.

c) În aplicația numerică obținem $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, adică $\alpha = 30^\circ$.