

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) Calcul corect și complet. Rezultat calcul = 2014	2p
	b) Calcul corect și complet. Rezultat calcul = 1006	3p
	c) Calcul corect și complet. Rezultat calcul = 11	2p
2.	$A = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-2} \cdot 10^2 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ $s(A) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$	2p
	$A = [a_1 \cdot \underbrace{99\dots 9}_{(n-1)\text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{999\dots 99}_{(n-2)\text{ cifre}} + \dots + a_{n-2} \cdot 99 + a_{n-1} \cdot 9 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)]\ddot{x}$	2p
	$A - s(A) = a_1 \cdot \underbrace{999\dots 99}_{(n-1)\text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{999\dots 99}_{(n-2)\text{ cifre}} + \dots + a_{n-2} \cdot 99 + a_{n-1} \cdot 9 \Rightarrow$ $A - s(A) = 9 \cdot [a_1 \cdot \underbrace{111\dots 11}_{(n-1)\text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{111\dots 11}_{(n-2)\text{ cifre}} + \dots + a_{n-2} \cdot 11 + a_{n-1} \cdot 1]$ 9 divide pe A-s(A)	2p
		1p
3.	a) Avem $3^n \cdot 3^6 + 3^n \cdot 3^5 + 3^n \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^n \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}$. Dând factor comun pe 3^n , se obține $3^n \cdot 1111 = \overline{xxxx}$. Astfel, pentru $n = 0 \Rightarrow x = 1$; $n = 1 \Rightarrow x = 3$; $n = 2 \Rightarrow x = 9$. Pentru $n \geq 3$ nu convine deoarece se obține $3^n \cdot 1111$ este număr natural de 5 sau mai multe cifre.	2p 2p
	b) Conform teoremei împărțirii cu rest în mulțimea $\mathbb{N}$ avem: $n = 9 \cdot c + r$, $0 \leq r < 9$, $r, c \in \mathbb{N}$ (1) și $n = 5 \cdot r + c$, $0 \leq c < 5$, $r, c \in \mathbb{N}$ (2) Din cele două egalități rezultă că $8 \cdot c = 4 \cdot r \Rightarrow r = 2 \cdot c$	2p
	Înlocuind în relația (1) obținem $n = 11 \cdot c \Rightarrow 11 n$. Cum $0 \leq c < 5$, $c \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq 11 \cdot c < 55 \Rightarrow n \in \{0, 11, 22, 33, 44\}$.	1p
4.	Numărul X fiind cel mai mare număr natural cu cifre nenule $\Rightarrow$ trebuie ca X să aibă număr maxim de cifre nenule de valoare minimă $\Rightarrow X = \underbrace{111\dots 1}_{2013\text{ cifre}}$.	2p
	$X = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + \dots + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1$ și $10^3 + 1 = 1001 \Rightarrow$	2p

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	a) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7,$ $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ și $2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11.$ $d = (2016, 2160, 2376) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ și $m = [2016, 2160, 2376] = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$	2p 1p 1p
	b). Fie x împărțitorul, $x \neq 0$. Din teorema împărțirii cu rest deducem că există numerele naturale a, b și c astfel încât $2041 = x \cdot a + 25, 2178 = x \cdot b + 18$ și $2390 = x \cdot c + 14, x > 25.$ Avem că $2016 = x \cdot a, 2160 = x \cdot b, 2376 = x \cdot c,$ de unde obținem că x este divizor comun pentru numerele 2016, 2160 și 2376, deci x divide cel mai mare divizor al numerelor 2016, 2160 și 2376, adică x divide numărul 72. Cum $x > 25$ și x divide numărul 72, deducem $x = 36$ sau $x = 72.$	1p 1p 1p
2.	a) $m(\sphericalangle AOC) = 57^\circ 11' 19''$	2p
	b) $m(\sphericalangle COM) = 16^\circ 52' 47''$	2p
	c). $10^\circ 19' 49''$	3p
3.	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{59}{70} \Leftrightarrow 70 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 59 \cdot a \cdot b \cdot c.$ $Dar (59, 70) = 1 \Rightarrow 70 / a \cdot b \cdot c \Rightarrow 2 / a \cdot b \cdot c$	2p
	$\left. \begin{array}{l} 2 / a \cdot b \cdot c \\ a \leq b \leq c \\ a, b, c \text{ numere prime} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 35 / b \cdot c \Rightarrow 5 / b \cdot c$ $\left. \begin{array}{l} 7 / b \cdot c \\ b \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow b = 5; c = 7.$	2p

	Cazul 1. $n = 5 \cdot k, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n + 5 = 5 \cdot (k + 1) : 5$ (nu convine) Cazul 2. $n = 5 \cdot k + 1, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n - 1 = 5 \cdot k$. Numărul $5 \cdot k$ este prim pentru $k = 1 \Rightarrow n = 6$; Așadar, pentru $n = 6$, numerele prime sunt : 5, 11, 17, 23, 29.. Cazul 3. $n = 5 \cdot k + 2, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n + 23 = 5 \cdot (k + 5) : 5$ (nu convine) Cazul 4. $n = 5 \cdot k + 3, k \in \mathbb{N}$. Atunci $n + 17 = 5 \cdot (k + 4) : 5$ (nu convine) Cazul 5. $n = 5 \cdot k + 4, k \in \mathbb{N}$. Atunci $n + 11 = 5 \cdot (k + 3) : 5$ (nu convine) Singura soluție este $n = 6$.	2p 1p
4.	Fie $x > 0$ lungimea segmentului $[A_0A_1]$. Atunci: segmentul $[A_0A_2]$ are lungimea $3 \cdot x$, segmentul $[A_0A_3]$ are lungimea $9 \cdot x = 3^2 \cdot x$, segmentul $[A_0A_4]$ are lungimea $3 \cdot 9 \cdot x = 3^3 \cdot x$, $\vdots$ segmentul $[A_0A_{10}]$ are lungimea $3^9 \cdot x$ Atunci lungimea segmentului $[A_9A_{10}]$ este $3^9 \cdot x - 3^8 \cdot x = 2 \cdot 3^8 \cdot x$. $2 \cdot 3^8 \cdot x = 118098 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^8 \cdot x = 2 \cdot 59049 \Leftrightarrow$ $3^8 \cdot x = 3^{10} \Leftrightarrow x = 9cm$. Lungimea segmentului $[A_0A_1]$ este 9 cm, Lungimea segmentului $[A_4A_5]$ este $3^4 \cdot x - 3^3 \cdot x = 2 \cdot 3^3 \cdot x$. Inlocuind pe x cu 9 cm, se obține 486 cm. Lungimea segmentului $[A_5A_6]$ este $3 \cdot 486 = 1458cm$.	1p 2p 1p
	Lungimea segmentului A_0M_0 este $\frac{x}{2}$ Lungimea segmentului A_0M_1 este $2 \cdot x$; Lungimea segmentului A_0M_2 este $6 \cdot x = 3 \cdot (2 \cdot x)$; Lungimea segmentului A_0M_3 este $18 \cdot x = 3^2 \cdot (2 \cdot x)$; Lungimea segmentului A_0M_4 este $54 \cdot x = 3^3 \cdot (2 \cdot x)$; Lungimea segmentului A_0M_7 este $3^6 \cdot (2 \cdot x)$; Lungimea segmentului M_4M_7 este $3^6 \cdot (2 \cdot x) - 3^3 \cdot (2 \cdot x) = 3^3 \cdot 2 \cdot x \cdot (3^3 - 1)$. Înlocuind pe x cu 9 cm, se obține $3^5 \cdot 2 \cdot (3^3 - 1) = 486 \cdot 26 = 12636cm$.	1p 1p 1p

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- ◆ **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- ◆ **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a = \sqrt{176} - \sqrt{288} + \sqrt{4032} = 4 \cdot \sqrt{11} - 12 \cdot \sqrt{2} + 24\sqrt{7} = 4 \cdot (\sqrt{11} - 3 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{7}).$ $b = -\sqrt{275} + \sqrt{450} - \sqrt{6300} = -5 \cdot \sqrt{11} + 15 \cdot \sqrt{2} - 30 \cdot \sqrt{7} = -5 \cdot (\sqrt{11} - 3 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{7}).$ $c = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}} + \frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}} + \frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}} =$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{45}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{117}} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{117}} + \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{221}} - \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{221}} +$ $+ \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{357}} - \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{357}} + \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{525}} - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{525}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$ $c + a : b = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0 \in \mathbb{N}.$	2p 2p 2p 1p
2.	a). $BC \parallel AD \xRightarrow{T.F.A} \triangle BOC \sim \triangle DOA \xRightarrow{def} \frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO} = \frac{BO}{OD} \quad (1).$ $EO \parallel BC \xRightarrow{T.Th} \frac{CO}{AO} = \frac{BE}{EA} \quad (2)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{EA}.$ $\left\{ \begin{array}{l} m(\angle EAD) = m(\angle EBC) \xRightarrow{L.U.L} \Rightarrow \triangle BEC \sim \triangle AED. \\ \frac{BE}{EA} = \frac{BC}{AD} \end{array} \right.$	1p 2p

	b). $\triangle BEC \sim \triangle AED \Rightarrow \angle ECB \equiv \angle EDA \quad (1)$ $\left. \begin{array}{l} BC \parallel EO \\ \text{secanta } EC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle ECB \equiv \angle CEO \quad (2)$ $\left. \begin{array}{l} AD \parallel EO \\ \text{secanta } ED \end{array} \right\} \Rightarrow \angle EDA \equiv \angle DEO \quad (3)$ Din (1),(2),(3) $\Rightarrow \angle CEO \equiv \angle DEO \Rightarrow [EO \text{ bisectoarea } \angle DEC.$	1p
	c). $EO \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle AEO \sim \triangle ABC \xrightarrow{def.} \frac{EO}{BC} = \frac{AO}{AC} \quad (1)$ $FO \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle DFO \sim \triangle DCB \xrightarrow{def.} \frac{FO}{BC} = \frac{DO}{DB} \quad (2)$ $AD \parallel BC \xrightarrow{T.F.A} \triangle DOA \sim \triangle BOC \xrightarrow{def.} \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{DO}{DB} \quad (3)$ (1),(2),(3) $\Rightarrow \frac{EO}{BC} = \frac{FO}{BC} \Rightarrow [EO] \equiv [FO].$	1p 1p
	a). $n = 4 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ sau}$ $n = 5 \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 11 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$	1p
3.	b). Termenii din suma de sub radical sunt numere naturale impare. Numărul numerelor naturale impare de la 1 la 2013 este 1007. $\left. \begin{array}{l} \text{Fie } S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011 + 2013 \\ S = 2013 + 2011 + 2009 + \dots + 5 + 3 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$ $2 \cdot S = \underbrace{2014 + 2014 + 2014 + \dots + 2014}_{1007 \text{ ori}} \Rightarrow$ $S = 1007^2.$ $\sqrt{1 + 3 + 5 + \dots + 2013} = \sqrt{1007^2} = 1007 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}.$	1p 2p
	c) $E = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994 =$ $997^2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 996 \cdot 998 \cdot \dots \cdot 1993 \cdot 2 \cdot 1995 \cdot \dots \cdot 2013) + 2 \cdot 997 =$ $997^2 \cdot k + 2 \cdot 997, k \in \mathbb{N}^*.$ Se demonstrează că numărul 997 este număr prim $\Rightarrow$ $E = 997 \cdot (997 \cdot k + 2) = 997 \cdot h, h \in \mathbb{N}^*, 997 \text{ nu divide numărul } h \Rightarrow$ $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2013 + 1994} \text{ nu este număr natural.}$	2p 1p

4)	a). Notăm $m(\angle ACB) = m(\angle EAB) = u^\circ \Rightarrow m(\angle ABC) = 2 \cdot u^\circ$; $\angle ABC$ – unghi exterior triunghiului $ABH \Rightarrow m(\angle AHB) = u^\circ = m(\angle EAB)$. triunghiurile ABH și AHC sunt isoscele.	1p
	b). În triunghiul isoscel BHA: $BE \perp AH \Rightarrow BE$ este mediană $\Rightarrow [AE] \equiv [EH]$. În triunghiul dreptunghic ADH: DE este mediană $\Rightarrow DE = \frac{AH}{2} = \frac{AC}{2}$. În triunghiul isoscel ACH: $AD \perp HC \Rightarrow AD$ este mediană $\Rightarrow [HD] \equiv [DC]$. $\left. \begin{array}{l} [AE] \equiv [EH] \\ [HD] \equiv [DC] \end{array} \right\} \Rightarrow [ED] \text{ este linie mijlocie în triunghiul } AHC \Rightarrow ED \parallel AC(1)$ $\left. \begin{array}{l} [AE] \equiv [DE] \Rightarrow \triangle AED \text{ este isoscel} \\ [EM - \text{bisectoarea } \angle AED] \end{array} \right\} \Rightarrow EM \perp AD$ $\left. \begin{array}{l} AD \perp EM \\ AD \perp HC \end{array} \right\} \Rightarrow EM \parallel HC \quad (2)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow MCDE$ este paralelogram.	2p 1p 1p
	c) $P_{MCDE} = 2 \cdot DC + 2 \cdot MC = HC + AC = BC + BH + AC = BC + AB + AC = P_{ABC}$	2p

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie-2013

Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	a) Prin calcul deducem că $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}-\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1}=$ $=\sqrt{3^2+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2}=\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ $=3+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)=4\in\mathbb{N}.$ Altfel, se poate folosi formula radicalilor dubli (compuși): $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \text{ (se aplică numai dacă } a^2-b\geq 0)$	3p
1.	b).Notăm $S=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}.$ Observăm că termenii sumei sunt de forma $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}\right]\cdot\left[(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}\right]}=$ $=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{(k+1)^2\cdot k-k^2\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)\cdot(k+1-k)}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}-k\cdot\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)}=$ $=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}. \text{ Deci,}$ $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \text{ pentru orice } k\in\mathbb{N}^*.$ Prin urmare, $S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=$ ceea ce trebuia demonstrat.	2p

	c). $\sqrt{x^2 - 8 \cdot x + 25} + \sqrt{4 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 25} = \sqrt{x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 + 9} + \sqrt{(2 \cdot x)^2 + 2 \cdot (2 \cdot x) \cdot 3 + 3^2 + 16} =$ $= \sqrt{(2 \cdot x)^2 + 2 \cdot (2 \cdot x) \cdot 3 + 3^2 + 16} =$ $\sqrt{(x-4)^2 + 9} + \sqrt{(2 \cdot x + 3)^2 + 16} > \sqrt{0+9} + \sqrt{0+16} = 7, (\forall) x \in \mathbb{R}.$ Precizăm că avem inegalitate strictă deoarece expresiile $x-4$ și $2 \cdot x + 3$ nu simultan, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	1p 1p
2.	a) Din triunghiul MAD ($m(\angle MAD) = 90^\circ$) obținem cu teorema lui Pitagora că $MD = 10$ cm. b) Notăm cu O intersecția diagonalelor rombului $[AC]$ și $[BD]$. Deoarece $ABCD$ este romb, deducem că $AC \perp BD$. Deci, $MA \perp (ABCD)$ și $AC \perp BD$, de unde, folosind teorema celor trei perpendiculare obținem că $MO \perp BD$. Avem că $AO = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3}$ și din triunghiul ΔMOA ($m(\angle MAO) = 90^\circ$) obținem cu teorema lui Pitagora că $MO = \sqrt{84} \text{ cm} = 2 \cdot \sqrt{21} \text{ cm}.$ Din $MO \perp BD$ și $AO \perp BD$ obținem $BD \perp (MAO)$, deci $(MOA) \perp (MBD)$. Ducem $AE \perp MO$, $E \in MO$ și din relațiile $(MOA) \cap (MBD) = MO$, $(MOA) \perp (MBD)$, deducem că $AE \perp (MBD)$, de unde obținem că distanța de la M la planul (MBD) este egală cu lungimea segmentului $[AE]$. Din triunghiul ΔMOA ($m(\angle MAO) = 90^\circ$) deducem că $AE = \frac{MA \cdot AO}{MO} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{21}} = \frac{12}{\sqrt{7}} = \frac{12 \cdot \sqrt{7}}{7}.$	1p 2p 1p

	c) Ducem $AN \perp BC$, $N \in BC$. Avem că $MA \perp (ABCD)$ și $AN \perp BC$, de unde obținem, folosind teorema celor trei perpendiculare, că $MN \perp BC$. Deci, distanța de la M la BC este egală cu lungimea segmentului $[MN]$. Deoarece triunghiul $\triangle ABD$ este echilateral deducem că $AM = 4 \cdot \sqrt{3}$. Din triunghiul $\triangle MAN$ ($m(\angle MAN) = 90^\circ$) obținem cu teorema lui Pitagora că $MN = 2 \cdot \sqrt{21}$ cm.	1p 2p
3.	a). $(a^3 + 1) \cdot (b^3 + 1) \geq (a^2 \cdot b + 1) \cdot (b^2 \cdot a + 1) \Leftrightarrow$ $a^3 \cdot b^3 + a^3 + b^3 + 1 \geq a^3 \cdot b^3 + a^2 \cdot b + b^2 \cdot a + 1 \Leftrightarrow$ $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot a \Leftrightarrow$ $(a + b) \cdot (a^2 - a \cdot b + b^2) \geq a \cdot b \cdot (a + b) \Leftrightarrow a^2 - a \cdot b + b^2 \geq a \cdot b \Leftrightarrow$ $(a - b)^2 \geq 0(A)$ b). $a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a \cdot b \cdot (a + b) \Leftrightarrow a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2 \Leftrightarrow$ $a^3 \cdot b^3 + 1 - a^2 \cdot b - a \cdot b^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $a^2 \cdot b \cdot (a \cdot b^2 - 1) - (a \cdot b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$ $(a \cdot b^2 - 1) \cdot (a^2 \cdot b - 1) \geq 0.$ În cazul $a, b \geq 1 \Rightarrow a^2 \cdot b \geq 1$, $a \cdot b^2 \geq 1 \Rightarrow (a^2 \cdot b - 1) \cdot (a \cdot b^2 - 1) \geq 0(A)$. În cazul $a, b \leq 1 \Rightarrow a^2 \cdot b \leq 1$, $a \cdot b^2 \leq 1 \Rightarrow (a^2 \cdot b - 1) \cdot (a \cdot b^2 - 1) \geq 0(A)$.	1p 1p 1p 1p 1p 1p

4.	a) Fie $A'B \cap AM = \{E\}$ $MB \parallel AA' \Rightarrow \triangle AA'E \sim \triangle MBE \Rightarrow \frac{MB}{AA'} = \frac{ME}{EA} = \frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2}.$ $\triangle ABM \left(m(\angle ABM) = 90^\circ \right) \Rightarrow AM^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{2};$ $\triangle AA'B \left(m(\angle A'AB) = 90^\circ \right) \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$ $\frac{ME}{EA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{3}{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{3};$ $\frac{BE}{EA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BE}{BA'} = \frac{1}{3} \Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{3};$ $AE^2 = \frac{6a^2}{9}$ $BE^2 = \frac{3a^2}{9}$ $\left. \begin{array}{l} AE^2 = \frac{6a^2}{9} \\ BE^2 = \frac{3a^2}{9} \\ AB^2 = a^2 \end{array} \right\} \xRightarrow{R.T.P} A'B \perp AM.$ $\left. \begin{array}{l} DA \perp (AA'B'B) \\ A'B \subset (AA'B'B) \end{array} \right\} \Rightarrow DA \perp A'B;$ $\left. \begin{array}{l} DA \perp A'B \\ A'B \perp AM \\ DA \cap AM = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow A'B \perp (AMD).$	1p 1p
----	---	---------------------

	b) $A'O \subset (A'BD);$ $\left. \begin{array}{l} A'B \cap AM = \{E\} \\ A'D \cap AN = \{F\} \end{array} \right\} \Rightarrow (A'BD) \cap (AMN) = EF$ $\frac{A'E}{EB} = \frac{2}{1} = \frac{A'F}{FD} \xrightarrow{R.T.Th.} EF \parallel BD \parallel MN;$ $\triangle A'BD : A'O$ este mediana $A'O \cap EF = \{G\};$ $GE \parallel OB \Rightarrow \frac{A'E}{EB} = \frac{2}{1} = \frac{A'G}{GO} \Rightarrow$ G este centrul de greutate al triunghiului $\triangle A'BD$. $Fie A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ $OO' \cap MN = \{O''\}$ $AO'' \cap EF = \{G'\}$ $G'E \parallel O''M \xrightarrow{TFA} \frac{AE}{AM} = \frac{AG'}{AO''} = \frac{G'E}{O''M} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ G' este centrul de greutate al triunghiului $\triangle ANM$. $\left. \begin{array}{l} \frac{G'E}{O''M} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{G'E}{OB} = \frac{2}{3} \\ Dar \frac{GE}{OB} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{G'E}{OB} = \frac{GE}{OB} \Rightarrow$ $G'E = GE, G, G' \in [EF] \Rightarrow G = G'$ Așadar, cele două triunghiuri au același centru de greutate.	2p 1p
--	--	-----------------------------------

	c). $\left. \begin{array}{l} (AA'D'D) \parallel (BB'C'C) \\ (AMD) \cap (BB'C'C) = MT, T \in CC' \\ (AMD) \cap (AA'D'D) = AD \end{array} \right\} \Rightarrow MT \parallel AD;$ $\left. \begin{array}{l} MT \parallel AD \\ [BM] \equiv [MB'] \end{array} \right\} \Rightarrow [CT] \equiv [TC'].$ $\left. \begin{array}{l} (AA'B'B) \parallel (DD'C'C) \\ (ANB) \cap (DD'C'C) = NT, T \in CC' \\ (ANB) \cap (AA'B'B) = AB \end{array} \right\} \Rightarrow NT \parallel AB;$ $(AMTD) \cap (ANTB) = AT;$ $\left. \begin{array}{l} A'B \perp (AMTD) \\ AT \subset (AMTD) \end{array} \right\} \Rightarrow AT \perp A'B;$ $\left. \begin{array}{l} DB \perp AC \\ DB \perp TC \\ AC \cap TC = \{C\} \end{array} \right\} \Rightarrow DB \perp (TAC);$ $\left. \begin{array}{l} DB \perp (TAC) \\ TA \subset (TAC) \end{array} \right\} \Rightarrow TA \perp DB;$ $\left. \begin{array}{l} AT \perp A'B \\ TA \perp DB \\ A'B \cap DB = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow AT \perp (A'BD).$	1p 1p
--	---	---------------------

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie-2013

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1,	$\left[\frac{x-1}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] + \left[\frac{x+3}{2} \right] = \left[\frac{x+7}{3} \right] + \left[\frac{x+4}{3} \right] + \left[\frac{x+1}{3} \right] \Leftrightarrow$ $\left[\frac{x-1}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{3} \right] \Rightarrow \left \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \right < 1 \Leftrightarrow x-5 < 6 \Leftrightarrow -6 < x-5 < 6 \Leftrightarrow$ $-1 < x < 11 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+1}{3} < 4; \text{Notăm } \left[\frac{x+1}{3} \right] = k, k \in \{0, 1, 2, 3\}.$	2p
	$1. \ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x-1}{2} < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ -1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2)$	1p
	$2. \ k = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \frac{x-1}{2} < 2 \\ 1 \leq \frac{x+1}{3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 5 \\ 2 \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 5);$	1p
	$3. \ k = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq \frac{x-1}{2} < 3 \\ 2 \leq \frac{x+1}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 7 \\ 5 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [5; 7);$	1p
	$4. \ k = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq \frac{x-1}{2} < 4 \\ 3 \leq \frac{x+1}{3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \leq x < 9 \\ 8 \leq x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [8; 9);$	1p
	$S = [1; 2) \cup [3; 7) \cup [8; 9)$	1p

2.	$(n+1) \cdot a_{n+1} = (n-1) \cdot a_n \Leftrightarrow a_n = n \cdot a_n - (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot (1)$ Dăm valori de la 2 la n în recurență și se obține: $a_2 = 2 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3$ $a_3 = 3 \cdot a_3 - 4 \cdot a_4$ $a_4 = 4 \cdot a_4 - 5 \cdot a_5$ $\vdots$ $a_n = n \cdot a_n - (n+1) \cdot a_{n+1}$ Adunând aceste egalități, se obține: $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = 2 \cdot a_2 - (n+1) \cdot a_{n+1} \Rightarrow$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + 2 \cdot a_2 - (n+1) \cdot a_{n+1} < a_1 + 2 \cdot a_2 = \frac{1}{3} + \frac{10}{6} = 2.$ Se demonstrează că $a_{n+1} \geq 0$ din recurență.	4p 3p
3.	$\underbrace{111\dots110}_{(n-1)\text{ cifre}} \underbrace{222\dots22}_n = \underbrace{111\dots11}_{(n-1)\text{ cifre}} \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot \underbrace{111\dots11}_n = \frac{10^{n-1}-1}{9} \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot \frac{10^n-1}{9} =$ $\frac{10^{2n}-8 \cdot 10^n-2}{9} = \frac{(10^n-4)^2-18}{9} = \left(\frac{10^n-4}{3}\right)^2 - 2.$ Se demonstrează prin inducție matematică că $(10^n-4):3, (\forall) n \in \mathbb{N}$ sau se demonstrează prin calcul direct: $10^n - 4 = \underbrace{100\dots0}_n - 4 = \underbrace{999\dots9}_{n-1} 6 = 3 \cdot \underbrace{333\dots3}_{n-1} 2.$ Așadar, $\frac{10^n-4}{3} = \underbrace{333\dots3}_{n-1} 2 \in \mathbb{N}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$ $a = \left(\underbrace{333\dots3}_{n-1} 2\right)^2 - 2 + x \text{ este pătrat perfect dacă } x = 2.$	4p 2p 1p

4.	Notăm $\frac{MB}{MA} = x$, $\frac{NC}{NA} = y$. Din M, G, I coliniare $\Rightarrow x + y = 1$ (1) Din M, I, N coliniare $\Rightarrow 6 \cdot x + 3 \cdot y = 4$ (2) Rezolvând sistemul, se obține $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ Demonstrarea condițiilor (1), (2): $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{GB} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{GA}$. Din $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$, se obține $\overrightarrow{GM} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \overrightarrow{GB} - \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{GC}$. $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{y+1} \cdot \overrightarrow{GC} + \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{GA}$ Analog, $\overrightarrow{GN} = \frac{1-y}{1+y} \cdot \overrightarrow{GC} - \frac{y}{1+y} \cdot \overrightarrow{GB}$. $\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}$ coliniari $\Rightarrow \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{y+1}{-y} = \frac{-x}{x+1} \cdot \frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x + y = 1$. Analog, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{IA}$ și $4 \cdot \overrightarrow{IA} + 6 \cdot \overrightarrow{IB} + 3 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{2-3 \cdot x}{2 \cdot (x+1)} \cdot \overrightarrow{IB} - \frac{3 \cdot x}{4 \cdot (x+1)} \cdot \overrightarrow{IC}$. $\overrightarrow{IN} = \frac{-3 \cdot y}{2 \cdot (y+1)} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{4-3 \cdot y}{4 \cdot (y+1)} \cdot \overrightarrow{IC}$. $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}$ coliniari $\Rightarrow \frac{2-3 \cdot x}{2 \cdot (x+1)} \cdot \frac{2 \cdot (y+1)}{-3 \cdot y} = -\frac{3 \cdot x}{4 \cdot (x+1)} \cdot \frac{4 \cdot (y+1)}{4-3 \cdot y} \Rightarrow$ $6 \cdot x + 3 \cdot y = 4$.	1p 3p 3p
----	--	-------------------------------

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a X-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	a). $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2.$ $(11 + 6\sqrt{2})^x = 6 \cdot (3 + \sqrt{2})^x - 7 \Leftrightarrow (3 + \sqrt{2})^{2x} = 6 \cdot (3 + \sqrt{2})^x - 7.$ Notăm $(3 + \sqrt{2})^x = t, t > 0.$ $t^2 = 6 \cdot t - 7 \Leftrightarrow t^2 - 6 \cdot t + 7 = 0 \Rightarrow t_1 = 3 + \sqrt{2}; t_2 = 3 - \sqrt{2};$ Ecuția devine $(3 + \sqrt{2})^x = 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1;$ $(3 + \sqrt{2})^x = 3 - \sqrt{2} \Leftrightarrow (3 + \sqrt{2})^x = \frac{1}{3 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg(3 - \sqrt{2})}{\lg(3 + \sqrt{2})}.$ Soluțiile ecuației sunt: 1 și $\frac{\lg(3 - \sqrt{2})}{\lg(3 + \sqrt{2})}.$	1p 1p 1p

	b). $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3};$ $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3};$ $\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{4n\pi}{3} + i\sin\frac{4n\pi}{3} =$ $2\cos(n\pi) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 2i\sin(n\pi) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 2 \cdot (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right);$ $2 \cdot (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow (-1)^n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow$ $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = (-1)^n \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi \Rightarrow n = 3k, k \in \mathbb{Z}$	1p 1p 1p 1p
2.	a). Fie $z_A = z_A - z_B = z_B \Leftrightarrow a+ib = (a-b) \cdot (1+i) \Leftrightarrow$ $\sqrt{a^2+b^2} = a-b \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow (a-2b)^2 = 3b^2 \Leftrightarrow$ $a-2b = b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 2b \pm b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = b \cdot (2 \pm \sqrt{3}).$ Există două relații ce satisfac condiția $a > b$. 1. $a = b \cdot (2 + \sqrt{3}) \Rightarrow z_A = b \cdot (2 + \sqrt{3} + i)$ sau $z_A = 2 \cdot b \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right);$ $z_A = b \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = 2 \cdot b \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$ 2. $a = b \cdot (2 - \sqrt{3}) \Rightarrow z'_A = b \cdot (2 - \sqrt{3} + i)$ sau $z'_A = 2 \cdot b \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$ $z'_A = b \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} = 2 \cdot b \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$ Analog, $z_B = b \cdot (1 + (2 + \sqrt{3}) \cdot i)$ si $z'_B = b \cdot (1 + (2 - \sqrt{3}) \cdot i).$ Există 2 triunghiuri echilaterale.	2p 1p

	Din $S_{AOB} = \sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow l = 2 \text{ cm} \Rightarrow a-b \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow a-b = \sqrt{2}$. Dar pentru $a = b(2 + \sqrt{3})$, se obține: $a - b = b \cdot (1 + \sqrt{3}) \Rightarrow a-b = b \cdot (1 + \sqrt{3}) = \sqrt{2} \Rightarrow$ $ b = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow b_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1).$ Astfel, $z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1 + i \cdot (\sqrt{3} - 1))$ și $z'_A = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1 + i \cdot (\sqrt{3} - 1))$, $z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1 + i \cdot (\sqrt{3} + 1)), z'_B = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1 + i \cdot (\sqrt{3} + 1)).$	1p 1p
	b). Fie $z_D = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ Din $[AD] \equiv [BA] \Leftrightarrow z_A - z_D = z_B - z_A \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2 \cdot (a-b)^2$ (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = (x-a) \cdot \vec{i} + (y-b) \cdot \vec{j};$ $\overrightarrow{AB} = (b-a) \cdot \vec{i} + (a-b) \cdot \vec{j};$ $(x-a) \cdot (b-a) + (y-b) \cdot (a-b) = 0, b \neq 0 \Rightarrow x - y + b - a = 0$ (2) Din (1), (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 2a - b \\ y = a \end{cases} \Rightarrow z_D = 2a - b + i \cdot a;$ sau $\begin{cases} x = b \\ y = 2b - a \end{cases} \Rightarrow z'_D = b + i \cdot (2b - a)$ dar $z_A + z_C = z_D + z_B \Rightarrow z_C = z_D + z_B - z_A \Rightarrow z_C = a + i \cdot (2 \cdot a - b);$ Analog, $z_{C'} = 2 \cdot b - a + b \cdot i$ $\begin{cases} z_C = b \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3} \cdot i) \\ z_D = b \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + i) \end{cases};$ $\begin{cases} z_{C'} = b \cdot (-\sqrt{3} + i) \\ z_{D'} = b \cdot (1 - i \cdot \sqrt{3}) \end{cases}$	1p 1p

3	$\left. \begin{array}{l} b^n \leq x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \\ a \in (0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a b^n \geq \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n) \Leftrightarrow$ $\log_a b^n \geq \log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n \Rightarrow$ $\log_a b \geq \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \log_a x_3 + \dots + \log_a x_n}{n}.$ $\log_a x_i > 0 = \log_a 1, (\forall) i = \overline{1, n}, \text{ deoarece numerele } a, x_i \in (0,1), (\forall) i = \overline{1, n}$ Se aplică inegalitatea mediilor: $\log_a b \geq \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n}{n} \geq \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \dots \cdot \log_a x_n} \Rightarrow$ $\log_a b \geq \sqrt[n]{\log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \log_a x_3 \cdot \dots \cdot \log_a x_n}$ Ridicând ambii membri la puterea a n-a, se obține inegalitatea cerută.	3p 1p 2p 1p
---	--	---

4.	Metoda 1. Deoarece $f(1) = 2$, vom lua $y = 1, (\forall) x \in \mathbb{Z}$. Se obține: $f(x+1) + f(x) = f(x) \cdot f(1) + 1, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1, (\forall) x \in \mathbb{Z}.$ Demonstrăm prin inducție matematică $P(n): f(x+n) = f(x) + n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ $P(1)$ este adevărată; Presupunem $P(n)$ adevărată ; Dar $f(x+n+1) = f((x+n)+1) = f(x+n) + 1 = f(x) + n + 1 \Rightarrow$ $P(n+1)$ adevărată ; În concluzie $f(x+n) = f(x) + n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ (1) În această relație $x \Rightarrow x - n \Rightarrow f(x) = f(x-n) + n \Rightarrow$ $f(x-n) = f(x) - n \quad (2)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow f(x+k) = f(x) + k, (\forall) k \in \mathbb{Z}, (\forall) x \in \mathbb{Z}$. Luând $x=0 \Rightarrow f(k) = f(0) + k$; Pentru $k=1 \Rightarrow f(1) = f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$. În concluzie $f(x) = x + 1, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ Verificăm condițiile problemei $f(x+y) + f(x \cdot y^2) = f(x) \cdot f(y^3) + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{Z} \text{ pentru funcția găsită:}$ $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{Z}$ Egalitatea devine: $x + y + 1 + y^2x + 1 = (x + 1) \cdot (y^3 + 1) + 1 \Leftrightarrow y + y^2x = xy^3 + y^3.$ Pentru $x=0$ și $y=2$, obținem $2=8$(fals) $\Rightarrow$ nu există funcții care să verifice condițiile problemei.	2p 2p 2p 1p
----	--	---

	Metoda 2. $f(x+y) + f(x \cdot y^2) = f(x) \cdot f(y^3) + 1, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$ Fie $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(0) = f(0) \cdot f(1) + 1 \Rightarrow$ $2 + f(0) = 2 \cdot f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1;$ Fie $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0) + f(1) = f(1) \cdot f(-1) + 1 \Rightarrow$ $1 + 2 = 2 \cdot f(-1) + 1 \Rightarrow f(-1) = 1;$ Fie $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow f(0) + f(-1) = f(-1) \cdot f(1) + 1 \Rightarrow$ $2 = 3(fals) \Rightarrow$ nu există funcții f cu proprietățile date.	2p 2p 2p 1p
--	---	---

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Aducem la forma cea mai simplă expresia dată. Se adună toate coloanele la prima coloană. Se scoate factor comun și se obține: $E(x, k) = 2 \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} \\ 1 & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} \\ 1 & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}.$ Se scade din linia a doua prima linie și din a treia linie scădem a doua linie. Obținem: $E(x, k) = 2 \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k} \\ 0 & \sqrt[3]{x} & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{x} \end{vmatrix} =$ $= 2(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{k})(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{k^2}) = -2(x + k);$ a) $E(-k, k) = \begin{vmatrix} -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} & 0 \\ \sqrt[3]{k} & 0 & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt[3]{k} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{k} \\ 0 & -\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix} = 0.$ $E(\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha) = -2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -2, (\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ b) Folosind (1), obținem: $-2(x+1) - 2(x+2) - \dots - 2(x+2013) \geq 0 \Rightarrow$ $2013x + (1+2+\dots+2013) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1007.$	3p 1p 1p 2p

	b) $P = E(2) \cdot E(3) \cdot E(4) \cdot \dots \cdot E(2n) \cdot E(2n+1) =$ $= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n+1)(2n+3)}{2n(2n+2)} \cdot \frac{(2n+2)(2n+4)}{(2n+1)(2n+3)} =$ $= \frac{(2n+2)(2n+4)}{2 \cdot 4} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{2m}{2} = m \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*,$ deoarece $(n+1)(n+2) = 2m = \text{nr. par}$ (fiind produs de două numere naturale consecutive).	1p 1p
3.	$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n}, (\forall) n \geq 1. \Leftrightarrow$ $\frac{n}{\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} + \sqrt{n \cdot x_n + 1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{n}{\sqrt{n \cdot x_n + n} + \sqrt{n \cdot x_n}} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_n + 1} + \sqrt{x_n} \leq 2 \leq \sqrt{x_n + \frac{n+1}{n}} + \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \quad (1)$ Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Relația (1) se scrie: $f(x_n) \leq f\left(\frac{9}{16}\right) \leq f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$. Funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty) \Rightarrow x_n \leq \frac{9}{16} \leq x_n + \frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{9}{16} - x_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{9}{16}.$	1p 1p 1p 2p 1p 1p

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie 2013

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
	a) Trebuie să avem că $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	1p
	Prin calcul, deducem că $F'(x) = (a \cdot b \cdot x + a + b) \cdot e^{b \cdot x + 2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	1p
	Din relațiile $F'(0) = f(0) \Leftrightarrow (a + b) \cdot e^2 = 4 \cdot e^2 \Leftrightarrow a + b = 4$ și $F'(-1) = f(-1) \Leftrightarrow (-a \cdot b + a + b) \cdot e^{-b+2} = 0 \Leftrightarrow -a \cdot b + a + b = 0$, obținem sistemul $\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$. Observăm că pentru $a = b = 2$ obținem că $F(x) = (2 \cdot x + 1) \cdot e^{2 \cdot x + 2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică relația $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Răspuns: $a = b = 2$.	2p

	b) Mai întâi calculăm $I = \int \sqrt{4-x^2} dx$, pentru $x \in (-2;2)$. Avem că $I = \int \sqrt{4-x^2} dx = \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 4 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + \int \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx =$ $4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} dx =$ $= 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \int x \cdot \left(\sqrt{4-x^2} \right)' dx = 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \sqrt{4-x^2} - \int \sqrt{4-x^2} dx = 4 \cdot \arcsin \frac{x}{2} - I$. Deci, $I = \int \sqrt{4-x^2} dx = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ și $x \in (-2;2)$.	2p
	Funcția $f: [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ este continuă, deci admite primitive. Notăm cu $F: [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Mai sus am determinat primitivele funcției f pe intervalul $(-2;2)$ și am obținut că $F(x) = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c, \text{ pentru orice } x \in (-2;2), \text{ unde } c \in \mathbb{R}.$ Deoarece F este derivabilă pe $[-2;2]$, rezultă că F este continuă pe $[-2;2]$. Obținem că $F(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} F(x) = \pi + c$ și $F(-2) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} F(x) = -\pi + c$. Prin urmare, primitivele funcției f sunt de forma $F: [-2;2] \rightarrow \mathbb{R}$ și $F(x) = 2 \cdot \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2} + c, \text{ pentru orice } x \in [-2;2].$	1p

2.	Fie $p, q \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f_p, f_q : E \rightarrow E, f_p(x, y) = \left(x + p \cdot y + \frac{p^2}{2}, y + p \right), f_q(x, y) = \left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2}, y + q \right).$ Avem că $f_p \circ f_q : E \rightarrow E, (f_p \circ f_q)(x, y) = f_p(f_q(x, y)) = f_p\left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2}, y + q\right) =$ $= \left(x + q \cdot y + \frac{q^2}{2} + p \cdot (y + q) + \frac{p^2}{2}, y + q + p \right) = \left(x + (p + q) \cdot y + \frac{(p + q)^2}{2}, y + p + q \right),$ pentru orice $(x, y) \in E$. Prin urmare, $f_p \circ f_q = f_{p+q}$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$. a) Ultima relație arată că operația de compunere a funcțiilor este bine definită pe G. Având în vedere că operația de compunere a funcțiilor este asociativă pe mulțimea $F = \{f \mid f : E \rightarrow E\}$ și $G \subset F$, rezultă că operația de compunere indusă pe G este asociativă. Mai departe, folosind $f_p \circ f_q = f_{p+q}$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$, se deduce ușor că operația de compunere indusă pe G este comutativă, admite element neutru $e = f_0 \in G$, orice element $f_p \in G$ este simetrizabil (inversabil) și simetricul lui f_p este $f_{-p} \in G$.	2p
	b) Funcția $h : G \rightarrow \mathbb{R}, h(f_t) = t$ este bijectivă (se demonstrează ușor) și $h(f_p \circ f_q) = h(f_{p+q}) = p + q = h(f_p) + h(f_q)$, pentru orice $p, q \in \mathbb{R}$. Prin urmare, G este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$, ceea ce trebuia demonstrat.	3p

3.	Înmulțim egalitatea cu e^{-x} și se obține: $\left(e^{-x} \cdot f(x)\right)' = e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1).$ $\int \left(e^{-x} \cdot f(x)\right)' dx = \int e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1) dx \Leftrightarrow$ $e^{-x} \cdot f(x) = -e^{-x} \cdot (x^2 + x + 1) - e^{-x} \cdot (2 \cdot x + 1) - e^{-x} \cdot 2 + C.$ $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1 - 1 - 2 + C = 0 \Rightarrow C = 4.$ $f(x) = 4 \cdot e^x - (x^2 + 3 \cdot x + 4), f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$	1p 1p 1p 1p
	b). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - (x^2 + 3 \cdot x + 4)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - (2 \cdot x + 3)}{e^x}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^x - 2}{e^x} = 4.$	3p
4	a). Aplicăm Mica teoremă a lui Fermat: dacă $(x, p) = 1, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \mid x^{p-1} - 1 \Rightarrow p \mid x^{4k+2} - 1$. Presupunem că există $x \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $x^2 + \hat{1} = \hat{0} \Leftrightarrow x^2 = -\hat{1} \Rightarrow x^{2(2k+1)} = (-\hat{1})^{2k+1} \Rightarrow \hat{1} = -\hat{1} (fals).$	2p
	b). Presupunem că $(\exists) x, y \in \mathbb{Z}_p^*$ astfel încât $x^2 + y^2 = \hat{0} \Leftrightarrow (xy^{-1})^2 + \hat{1} = \hat{0} (fals)$. În concluzie singura soluție este $x = y = \hat{0}$.	2p
	c). Ecuația se mai scrie $x^2 + y^2 = 2401 \cdot 5. \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7^4 \cdot 5$. Reducând ecuația în $\mathbb{Z}_7 \Rightarrow x^2 + y^2 = \hat{0}, x, y \in \mathbb{Z}_7 \Rightarrow x = y = \hat{0}$. Deci $x = 7 \cdot a, y = 7 \cdot b, a, b \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine $a^2 + b^2 = 49 \cdot 5$; La fel $a = 7m, b = 7n \Rightarrow m^2 + n^2 = 5 \Leftrightarrow$ $(m, n) \in \{(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, 2), (1, -2), (-1, -2)\} \Rightarrow$ $(x, y) \in \{(98, 49), (98, -49), (-98, 49), (-98, -49)\} \cup$ $\{(49, 98), (-49, 98), (49, -98), (-49, -98)\}.$	3p