**Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa Locală Dâmboviţa**

18 februarie 2017

« Rezolvarea unei probleme constă în găsirea celor capabili să o rezolve »

## CLASA A IX-A - BAREM

**Subiectul 1.** $\left(3\sqrt{x+y}+2\sqrt{8-x}+\sqrt{6-y}\right)^2$
$\leq (3^2+2^2+1^2)((x+y)+(8-x)+(6-y))=14^2$ .............. **3 puncte**
$\frac{\sqrt{x+y}}{3}=\frac{\sqrt{8-x}}{2}=\frac{\sqrt{6-y}}{1}$ .............................................. **2 puncte**
$x=4, y=5$ ............................................................ **2 puncte**

**Subiectul 2.** $a_n=4n-3$ .................................. **1 punct**
$b_n=3n+2$ ............................................................ **1 punct**
$a_n \cap b_n = 12n-7$ ................................................ **3 puncte**
$\sum_{k=1}^{100}(12k-7)=59\,900$ ........................................... **2 puncte**

**Subiectul 3.** Cazul $n=1$ .................................. **1 punct**
$3^{2^{n+1}}-1=\left(3^{2^n}-1\right)\left(3^{2^n}+1\right)$ ....................................... **1 punct**
$=2^{n+2}k_n\left(3^{2^n}+1\right)$ ................................................ **1 punct**
$=2^{n+3}k_{n+1}$, cu demonstraţia faptului că $3^{2^n}+1$ se divide cu 2, .. **2 puncte**
însă nu se divide cu 4 ................................................ **2 puncte**

**Subiectul 4.** a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BN}$ ................................ **1 punct**
$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CP}$ ........................................................ **1 punct**
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CP} \Rightarrow CPMA$ este paralelogram ...................... **1 punct**
b) $r_{O_1}=\frac{1}{4}(r_A+r_M+r_N+r_B)$ şi analoagele ................. **1 punct**
$r_{G(ABC)}=\frac{1}{3}(r_A+r_B+r_C)$, $r_{G(MNP)}=\frac{1}{3}(r_M+r_N+r_P)$ .......... **1 punct**
$r_{G(O_1O_2O_3)}=\frac{1}{3}(r_{O_1}+r_{O_2}+r_{O_3})=\frac{1}{2}\left(r_{G(ABC)}+r_{G(MNP)}\right)$ ........ **2 puncte**

**Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa Locală Dâmboviţa**
18 februarie 2017
« Rezolvarea unei probleme constă în găsirea celor capabili să o rezolve »

## CLASA A X-A - BAREM

**Subiectul 1.** $\omega^3 = \overline{\omega}^3 = 1$, unde $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .............. **2 puncte**
$\omega^{3k} + \overline{\omega}^{3k} = 2$ .............................................. **1 punct**
$\omega^{3k+1} + \overline{\omega}^{3k+1} = \omega + \overline{\omega} \neq 2$ .................................... **2 puncte**
$\omega^{3k+2} + \overline{\omega}^{3k+2} = \omega^2 + \overline{\omega}^2 \neq 2$ ................................ **2 puncte**

**Subiectul 2.** $\lg a \lg y = \lg b \lg x$ ............................ **1 punct**
$\lg a (\lg a + \lg x) = \lg b (\lg b + \lg y)$ .............................. **2 puncte**
$x = a^{-1}$ ..................................................... **2 puncte**
$y = b^{-1}$ ..................................................... **2 puncte**

**Subiectul 3.** **a)** $f$ injectivă ................................ **2 puncte**
$f$ surjectivă ............................................ **2 puncte**
**b)** $g(f(x)) = x - f(f(x))$, deci $g(f(x)) = -1$ .............. **2 puncte**
$g \equiv -1$, deoarece $f$ este surjectivă ............................. **1 punct**

**Subiectul 4.** " $\Leftarrow$ " ........................................ **3 puncte**
$\log_{ab^2c^2} a = \frac{x}{x+2y+2z}$ etc, unde $x = \lg a$ etc ........................ **2 puncte**
$\sum \frac{x}{x+2y+2z} \geq \frac{3}{5}$, cu egalitate cand $x = y = z$, deci $a = b = c$ ...... **2 puncte**

**Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa Locală Dâmboviţa**
18 februarie 2017
« Rezolvarea unei probleme constă în găsirea celor capabili să o rezolve »

## CLASA A XI-A - BAREM

**Subiectul 1.** $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix}$ ... **2 puncte**

$\begin{cases} a^2+bc=2 \\ ab+bd=-1 \\ ac+cd=1 \\ d^2+bc=0 \end{cases}$ ........................................... **1 punct**

$\left[a=-\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}, d=-\frac{1}{2}\right]$ ................................ **2 puncte**

$\left[a=\frac{3}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{2}\right]$ .................................. **2 puncte**

**Subiectul 2.** $TrA=2a$, $\det A=0 \Rightarrow A^2=2aA$ ............ **2 puncte**

$TrB=2a$, $\det B=0 \Rightarrow B^2=2aB$ ............................ **2 puncte**

$A^k=(2a)^{k-1}A$ ..................................................... **1 punct**

$B^k=(2a)^{k-1}B$ ..................................................... **1 punct**

$\det\left(A^k+B^k\right)=\det\left((2a)^{k-1}(A+B)\right)=(2a)^{2k}$ ................. **1 punct**

**Subiectul 3.** $3a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$ ......................... **2 puncte**

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$ ........................... **2 puncte**

Calculul limitei $\lim_{n\to\infty}\left(3a_n-\frac{5}{6}\right)^n=e^{-3}$ ....................... **3 puncte**

**Subiectul 4.** $f(x)=[x]-\frac{1}{\{x\}}$, pentru $x\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}^*$ şi

$f(x)=x$, pentru $x\in\mathbb{N}^*$ (sau alt exemplu corect)................ **5 puncte**

$f(x+1)-f(x)\geq 1$ (verificare) ................................. **1 punct**

$f$ nu are limită la infinit: $f(n)=n$, $f\left(n+\frac{1}{n}\right)=0$ (verificare)..... **1 punct**

**Olimpiada Naţională de Matematică - Etapa Locală Dâmboviţa**
18 februarie 2017
« Rezolvarea unei probleme constă în găsirea celor capabili să o rezolve »

## CLASA A XII-A - BAREM

**Subiectul 1.** Asociativitate .................................... **1 punct**
Element neutru ................................................ **1 punct**
Simetrie ...................................................... **1 punct**
Comutativitate ................................................ **1 punct**
Izomorfismul grupurilor ....................................... **3 puncte**

**Subiectul 2.** $a^2 = e \Rightarrow a^{-1} = a$ .................... **1 punct**
$b = a^{-1}b^4a$ .............................................. **2 puncte**
$b^3 = a^{-1}b^{12}a = e$ ..................................... **2 puncte**
$ab = b^4a = b^3ba = ba$ ...................................... **2 puncte**

**Subiectul 3.** $e^{-x}\left(f\left(x\right) - F\left(x\right)\right) = 2x$, $F\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right) dt$ .... **2 puncte**
$\left(e^{-x}F\left(x\right)\right)' = 2x$ ..................... **2 puncte**
$\Rightarrow e^{-x}F\left(x\right) = x^2 + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ .......... **1 punct**
$F\left(x\right) = e^x\left(x^2 + c\right)$ şi $F\left(0\right) = 0 \Rightarrow F\left(x\right) = x^2e^x$ .......... **1 punct**
$f\left(x\right) = \left(x^2 + 2x\right)e^x$ .................... **1 punct**

**Subiectul 4.** Prin părţi: $I = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^{nx}\right)' \sin x dx$ ....... **2 puncte**
$= -\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin 1 + \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{nx} \cos x dx$ .......... **1 punct**
$-\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin 1 \to 0$ ........ **1 punct**
$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{nx} \cos x dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{nx} dx$ .......... **2 puncte**
$= \frac{1}{n \ln 2} - \frac{1}{n \ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, deci limita este 0 .......... **1 punct**