

OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

23 februarie 2014

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M1

1.	Din oficiu	1p
	Scădem linia întâi din celelalte.	3p
	Dezvoltăm determinantul după elementele ultimei coloane.	2p
	În determinantul obținut aplicăm relația $p! - (p-1)! = (p-1)(p-1)!$ pentru elementele de pe diagonala principală.	2p
	Scriem rezultatul final observând că elementele de o parte a diagonalei principale sunt nule.	2p

2.	Din oficiu	1p
a.)	$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 19 & -8 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ și $\det X = 145$	2p
b.)	$X = A^4 + 5A^2 + 4I_n = (A^2 + I_n)(A^2 + 4I_n) \Rightarrow \det X = \det(A^2 + I_n) \cdot \det(A^2 + 4I_n)$	2p
	Însă $\det(A^2 + I_n) = \det(A + iI_n) \cdot \det(A - iI_n) = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \geq 0$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.	2p
	Analog $\det(A^2 + 4I_n) = \det(A + 2iI_n) \cdot \det(A - 2iI_n) = (c + id)(c - id) = c^2 + d^2 \geq 0$ pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.	1p
	Deci $\det X \geq 0$ pentru orice $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.	2p

3.	Din oficiu	1p
a.)	Avem $\frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k} = \frac{k^4 + k + k^2 - k + 1}{k(k+1)(k^2 - k + 1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.	3p
	Prin urmare $\sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k} = n + 1 - \frac{1}{n+1}$.	2p
	De unde obținem $a_n = a + n + 1 - n - 1 + \frac{1}{n+1} = a + \frac{1}{n+1}$.	1p
	Astfel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, deci șirul este convergent.	1p
b.)	Deoarece $a_n - a = \frac{1}{n+1}$, are loc $ a_n - a \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n \geq 99$	1p
	Deci termenul cerut în enunț este $a_{99} = a + \frac{1}{100}$.	1p

4.	Din oficiu	1p
a.)	Din $x_{n+1} - x_n + x_n^2 = 0$ rezultă $x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \forall n \in \mathbb{N}$	1p
	Dacă $x_0 \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ atunci evident $x_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, deci nu este posibil ca $x_{2014} = 1$.	1p
	Dacă $x_0 \in (0, 1)$ atunci evident $x_n \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N}$, deci nu este posibil ca $x_{2014} = 1$.	1p
	Rezultă că nu există șiruri cu proprietatea din enunț.	1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA

b.)	Fie $a_n = \cos(C_n^2 \pi)$. Rezultă că $a_{4n} = \cos(C_{4n}^2 \pi) = \cos(2n(4n-1)\pi) = 1 \text{ pentru } \forall n \in N^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = 1.$	2p
	Însă $a_{4n+2} = \cos(C_{4n+2}^2 \pi) = \cos((2n+1)(4n+1)\pi) = -1 \text{ pentru } \forall n \in N^* \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+2} = -1$	2p
	Deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are două subșiruri cu limite diferite, deci șirul respectiv nu are limită.	1p