



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a IX-a

Problema 1. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Dacă $\vec{AI} + \vec{BI} + \vec{CI} = \vec{0}$, atunci să se determine măsura unghiului dintre AI și BC .

Soluție și barem de corectare:

Oricare ar fi T un punct în planul triunghiului, are loc $\vec{TI} = \frac{a\vec{TA} + b\vec{TB} + c\vec{TC}}{a+b+c}$1 punct

$$\vec{AI} + \vec{BI} + \vec{CI} = \frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{a+b+c} + \frac{a\vec{BA} + c\vec{BC}}{a+b+c} + \frac{a\vec{CA} + b\vec{CB}}{a+b+c} = \frac{(b-a)\vec{AB} + (c-a)\vec{AC} + (c-b)\vec{BC}}{a+b+c}$$
.....2 puncte

$$\frac{(b-a)\vec{AB} + (c-a)\vec{AC} + (c-b)\vec{BC}}{a+b+c} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{(b-a-c+b)\vec{AB} + (c-a+c-b)\vec{AC}}{a+b+c} = \vec{0} \quad (1)$$
.....1 punct

$\vec{AB}$ și $\vec{AC}$ sunt necoliniari (2).....1 punct

Din (1) și (2) avem că $2b = a + c$ și $2c = a + b \Rightarrow a = b = c \Rightarrow$ triunghiul ABC este echilateral.....1 punct

Cum triunghiul ABC este echilateral, atunci bisectoarea AI este și înălțime,

așadar măsura unghiului dintre AI și BC este de 90°1 punct

Problema 2. Să se calculeze suma

$$A = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^3 + \dots + n \cdot 7^n,$$

unde n este număr natural nenul.

Soluție și barem de corectare:

$$A = (7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n) + (7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^n) + \dots + (7^{n-1} + 7^n) + 7^n$$
.....4 puncte

$$A = 7^1 \cdot \frac{7^n - 1}{6} + 7^2 \cdot \frac{7^{n-1} - 1}{6} + 7^3 \cdot \frac{7^{n-2} - 1}{6} + \dots + 7^{n-1} \cdot \frac{7^2 - 1}{6} + 7^n$$
.....1 punct

$$A = \frac{7^{n+1} - 7^1}{6} + \frac{7^{n+1} - 7^2}{6} + \frac{7^{n+1} - 7^3}{6} + \dots + \frac{7^{n+1} - 7^{n-1}}{6} + 7^n = \frac{(n-1)7^{n+1} - (7^1 + 7^2 + \dots + 7^{n-1})}{6} + 7^n$$
.....1 punct

$$A = \frac{(n-1)7^{n+1} - (7^1 + 7^2 + \dots + 7^{n-1})}{6} + 7^n = \frac{7}{36} [7^n(6n-1) + 1]$$
.....1 punct



Problema 3. a) Să se arate că $x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ și apoi să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale strict pozitive a, b, c , are loc :

$$\frac{2}{a^4 + 1} + \frac{2}{b^4 + 1} + \frac{2}{c^4 + 1} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ cu $x + y + z = 1$. Să se arate că

$$3(xy + yz + zx) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz$$

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

a) $x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = 1$ 1 punct

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x^4 + 1 \geq x^3 + x, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow \frac{1}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{x^3 + x}, \forall x \in (0, \infty) \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

oricare ar fi numerele reale strict pozitive a, b, c are loc $\frac{1}{a^4 + 1} + \frac{1}{b^4 + 1} + \frac{1}{c^4 + 1} \leq \frac{1}{a^3 + a} + \frac{1}{b^3 + b} + \frac{1}{c^3 + c}$ 1 punct

$$a^3 + a \geq 2\sqrt{a^3 \cdot a} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3 + a} \leq \frac{1}{2a^2} \text{ și analoagele în } b, \text{ respectiv } c, \text{ prin sumare,}$$

Obținem, în final, inegalitatea dată1punct

$$\text{b) } 3(xy + yz + zx) \leq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq 2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + x^2z + z^2x \text{ (1)} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0, \text{ oricare ar fi numerele reale strict pozitive } a, b, c \text{ (2)} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Folosind inegalitatea (2) pentru x, y , pentru x, z și pentru y, z și sumând obținem inegalitatea (1)

Cu egalitate pentru $x = y = z = \frac{1}{3}$ 1 punct



Problema 4. Diagonalele patrulaterului convex ABCD se intersectează în punctul O și $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$. Fie $N \in (AD)$ astfel încât $\frac{AN}{ND} = 4$ și $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MC} = x, x \in (0,1)$.

- Să se determine x , știind că punctele B, M, N sunt coliniare.
- Dacă Q este mijlocul segmentului MN , atunci să se arate că $2 \cdot AQ < AM + AN$.

Soluție și barem de corectare:

- a) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0} \Rightarrow ABCD$ paralelogram.....2 puncte
- $\vec{BM} = \frac{1}{x+1} \cdot \vec{BA} + \frac{x}{x+1} \cdot \vec{BC}$ și $\vec{BN} = \vec{BA} + \frac{4}{5} \cdot \vec{AD} = \vec{BA} + \frac{4}{5} \cdot \vec{BC}$1 punct
- B, M, N sunt coliniare $\Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$ 1 punct
- b) Fie T simetricul punctului A față de Q , atunci $AMTN$ este paralelogram și $AN = MT$ (1).....1 punct
- În triunghiul AMT avem $AT < AM + MT \Leftrightarrow 2AQ < AM + MT$ (2).....1 punct
- Din (1) și (2) obținem $2 \cdot AQ < AM + AN$1 punct



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a X-a

Problema 1. Arătați că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{\log_a b + \log_b c}{1 + \log_a c} + \frac{\log_b c + \log_c a}{1 + \log_b a} + \frac{\log_c a + \log_a b}{1 + \log_c b} \geq 3.$$

Soluție și barem de corectare:

Folosind formula schimbării de bază și notând $\ln a = x$, $\ln b = y$, $\ln c = z$,

Inegalitatea se rescrie: $\sum \frac{\frac{y}{x} + \frac{z}{x}}{1 + \frac{z}{x}} \geq 3 \Leftrightarrow \sum \left(\frac{y}{x+z} + \frac{xz}{yx+yz} \right) \geq 3$ **2p**

Avem, conform inegalității lui Nesbitt, $\sum \frac{y}{x+z} \geq \frac{3}{2}$ **2p**

$$\sum \frac{xz}{yx+yz} \geq \frac{3}{2}$$
2p

Sumând se obține, $\sum \left(\frac{y}{x+z} + \frac{xz}{yx+yz} \right) \geq 3$. **1p**

Problema 2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$.

Să se calculeze $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$.

Soluție și barem de corectare:

Fie $\frac{z_1}{z_2 + z_3} = a + ib$, $a, b \in R$.

Egalitatea $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3|$

$$\text{devine } \left| (z_2 + z_3) \left(\frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right) \right| = |z_2 + z_3| \Leftrightarrow |z_2 + z_3| \cdot \left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right| = |z_2 + z_3| \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{și cum } |z_2 + z_3| \neq 0, \text{ rezultă } \left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |a + 1 + bi| = 1 \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{de unde } (a + 1)^2 + b^2 = 1. \quad (1) \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Avem } |z_2 + z_3| = |z_1| \Leftrightarrow \left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| = 1 \Leftrightarrow |a + bi| = 1 \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{adică } a^2 + b^2 = 1. \quad (2) \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Din (1) rezultă } b^2 = 1 - (a + 1)^2 \text{ și înlocuind în (2) obținem } a^2 + 1 - (a + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0, \\ \text{deci } a = -\frac{1}{2} \text{ iar } b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \mathbf{1p}$$

$$\text{Există două soluții : } \frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sau}$$

$$\frac{z_1}{z_2 + z_3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \mathbf{1p}$$



Problema 3. Să se rezolve ecuațiile în mulțimea numerelor complexe :

a) $|z - a| + |z - b| = b - a$, unde a, b sunt două numere reale fixate, cu $a \leq b$.

b) $|z| + |z - 1| + |z - 2| + |z - 3| + \dots + |z - 2018| + |z - 2019| = 1010^2$

Soluție și barem de corectare:

a) Considerăm punctele M, A, B de afixe z, a respectiv b .

Atunci $MA = |z - a|$

$MB = |z - b|$

$AB = |b - a| = b - a$ și ecuația devine $MA + MB = AB$, deci $M \in [AB]$ 2p

astfel $z \in \mathbb{R}$ și $z \in [a, b]$ 1p

b) $|z| + |z - 2019| \geq |z| + |2019 - z| \geq |z + 2019 - z| \geq 2019$,

cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}$ și $z \in [0, 2019]$

$|z - 1| + |z - 2018| \geq |z - 1| + |2018 - z| \geq |z - 1 + 2018 - z| \geq 2017$,

cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}$ și $z \in [1, 2018]$

.....

$|z - 1009| + |z - 1010| \geq |z - 1009| + |1010 - z| \geq |z - 1009 + 1010 - z| \geq 1$,

cu egalitate pentru $z \in \mathbb{R}$ și $z \in [1009, 1010]$ 2p

Știind că : $1 + 3 + 5 + \dots + 2019 = 1010^2$ 1p

prin sumare din inegalitățile obținute

ecuația $|z| + |z - 1| + |z - 2| + |z - 3| + \dots + |z - 2018| + |z - 2019| = 1010^2$

are soluții reale și $z \in [1009, 1010]$ 1p



Problema 4. Să se rezolve ecuația: $\frac{8-x}{x^3-2} = 2019^{3x^3+3x-30}$

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$$2019^{3x^3+3x-30} > 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{8-x}{x^3-2} > 0 \Leftrightarrow x \in (\sqrt[3]{2}, 8) \quad \mathbf{1p}$$

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus (\sqrt[3]{2}, 8)$ ecuația nu are soluții. $\mathbf{1p}$

Dacă $x \in (\sqrt[3]{2}, 8)$ atunci logaritmam egalitatea în baza 2019:

$$\log_{2019}(8-x) - \log_{2019}(x^3-2) = 3x^3 + 3x - 30 \quad \mathbf{1p}$$

$$(1) \quad \log_{2019}(8-x) + 3(8-x) = \log_{2019}(x^3-2) + 3(x^3-2) \quad \mathbf{1p}$$

$f: (\sqrt[3]{2}, 8) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_{2019} x + 3x$ este suma a două funcții strict crescătoare deci f injectivă $\mathbf{1p}$

Din (1) avem $f(8-x) = f(x^3-2)$ și cum f injectivă se obține $8-x = x^3-2$; $\mathbf{1p}$

$$x^3 - 8 + x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4 + 1) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$S = \{2\} \quad \mathbf{1p}$$



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a XI-a

Problema 1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $t \in [0; 2\pi)$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Să se calculeze A^n și B^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție și barem de corectare:

Se demonstrează prin inducție matematică $A^n = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$ 4p

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Se demonstrează prin inducție matematică } B^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} & \sin \frac{n\pi}{3} & 0 \\ -\sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \geq 1 \dots\dots 2p$$

Problema 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, astfel încât $AB - BA = A$. Să se arate că matricea A nu este inversabilă.

Soluție și barem de corectare:

Presupunem că A este inversabilă și obținem

$$ABA^{-1} - B = I_3 \qquad B - A^{-1}BA = I_3 \dots\dots\dots 2p$$

$$ABA^{-1} - A^{-1}BA = 2I_3 \dots\dots\dots 1p$$

$$Tr(ABA^{-1} - A^{-1}BA) = Tr(2I_3) \dots\dots\dots 1p$$

$$Tr(ABA^{-1}) = Tr(A^{-1}BA) \dots\dots\dots 1p$$

$$Tr(2I_3) = 6 \dots\dots\dots 1p$$

$$0=6 \text{ (fals), deci presupunerea este falsă și matricea } A \text{ nu este inversabilă} \dots\dots\dots 1p$$



Problema 3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = (0;1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1, \forall n \geq 1$. Admitem cunoscută inegalitatea $2^x < x+1, \forall x \in (0;1)$.

Să se calculeze: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n) - 1}{a_n}$.

Gazeta matematică – prelucrare

Soluție și barem de corectare:

a) Se arată prin inducție matematică $a_n \in (0;1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem $a_n \in (0;1)$ și demonstrăm $a_{n+1} \in (0;1)$.

$$a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 > 2^0 - 1 = 0 \text{ și } a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 > 2^1 - 1 = 1 \dots\dots\dots 1p$$

$a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - 1 - a_n < 0$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$ (din inegalitatea cunoscută), așadar șirul este strict descrescător.....1p

Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și mărginit, deci convergent, adică există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in [0;1)$

Prin trecere la limită în relația de recurență se obține $l+1 = 2^l$. Soluțiile ecuației se găsesc printre abscisele punctelor de intersecție dintre o dreaptă și o funcție convexă, ceea ce înseamnă că ecuația are cel mult două soluții și cum 0 și 1 se observă că sunt soluții, obținem că singurele soluții pentru ecuația dată sunt 0 și 1. Rămâne că $l = 0$, deoarece $l \in [0;1)$ 2p

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \ln 2 \dots\dots\dots 1p$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n) - 1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln[(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n)]} - 1}{\ln[(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n)]} \cdot \frac{\ln[(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n)]}{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln[(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n)]} - 1}{\ln[(1 + \sin a_n)(1 + \sin 2a_n)]} \cdot \left(\frac{\ln(1 + \sin a_n)}{\sin a_n} \frac{\sin a_n}{a_n} + \frac{\ln(1 + \sin 2a_n)}{\sin 2a_n} \frac{\sin 2a_n}{2a_n} \cdot 2 \right) = 3 \ln e = 3 \\ &\dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$



Problema 4. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = f(5x+1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem de corectare:

$$f(x) = f(5x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Fie } x \longrightarrow \frac{x-1}{5}$$

$$f\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{5^2}x - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right)$$

...

$$f\left(\frac{1}{5^n}x - \frac{1}{5^n} - \dots - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right)$$

$$\text{adică } f\left(\frac{1}{5^n}x - \frac{1}{5^n} - \dots - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5}\right) = f(x) \dots\dots\dots 3p$$

$$f\left(\frac{1}{5^n}x - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\right) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$$

Deoarece f este continuă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{5^n}x - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5^n}x - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\right)\right) = f\left(-\frac{1}{4}\right) \dots\dots\dots 2p$$

$$f(x) = f\left(-\frac{1}{4}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ deci } f \text{ este funcție constantă} \dots\dots\dots 1p$$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a XII-a

Problema 1. Calculați: a) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx, x \in (-1, \infty)$;

b) $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{\ln x + 2} \right)^2 dx.$

Soluție și barem de corectare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx &= \int \left(\frac{-1}{x+2} \right)' \cdot x^2 e^x dx = \\ &= \frac{-x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{(2x + x^2) e^x}{x+2} dx = \\ &= \frac{-x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = \frac{x-2}{x+2} e^x + C \end{aligned} \quad (4 \text{ p})$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_1^e \left(\frac{\ln x}{\ln x + 2} \right)^2 dx &= \int_0^1 \frac{t^2 e^t}{(t+2)^2} dt = \\ &= \left. \frac{t-2}{t+2} e^t \right|_0^1 = 1 - \frac{e}{3} \end{aligned} \quad (3 \text{ p})$$

Problema 2. Arătați că nu există funcții primitivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, astfel încât pentru o primitivă oarecare F a lor, să existe egalitatea $F(x) \cdot F(1-x) = F(x^2), (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem de corectare:

Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ este o funcție care admite primitive, atunci există $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ astfel încât F este derivabilă și $F'(x) = f(x), (\forall) x \in \mathbb{R}$. (2 p)

Presupunem că există F cu proprietatea din enunț, atunci

$$f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) = 2xf(x^2), (\forall) x \in \mathbb{R} \quad (2 \text{ p})$$

$$\text{Pentru } x = 0 \text{ se obține } f(0)F(1) - f(1)F(0) = 0 \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{și pentru } x = 1 \text{ se obține } f(1)F(0) - f(0)F(1) = 2f(1) \quad (1 \text{ p})$$

$$\Rightarrow 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ contradicție} \quad (1 \text{ p})$$

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e . Spunem că un automorfism $f \in \text{Aut}(G)$ este fără puncte fixe dacă $\{x \in G, f(x) = x\} = \{e\}$. Arătați că dacă $f \in \text{Aut}(G)$ este fără puncte fixe, atunci $\{f(x) \cdot x^{-1}, x \in G\} = G$.

Soluție și barem de corectare:

Fie $g: G \rightarrow G, g(x) = f(x) \cdot x^{-1}, (\forall) x \in G$ și $x_1, x_2 \in G$ astfel încât $g(x_1) = g(x_2)$. (2 p)

$$\Rightarrow f(x_1) \cdot x_1^{-1} = f(x_2) \cdot x_2^{-1} \Leftrightarrow f^{-1}(x_2) \cdot f(x_1) = x_2^{-1} \cdot x_1 \Leftrightarrow \quad (1 \text{ p})$$

$$\Leftrightarrow f(x_2^{-1}) \cdot f(x_1) = x_2^{-1} \cdot x_1 \Leftrightarrow f(x_2^{-1} \cdot x_1) = x_2^{-1} \cdot x_1 \quad (1 \text{ p})$$

$$f \text{ este fără puncte fixe} \Rightarrow x_2^{-1} \cdot x_1 = e \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g \text{ injectivă} \quad (1 \text{ p})$$

Cum mulțimea G este finită se obține g bijectivă (1 p)

$$\text{de unde} \quad \text{Im} g = G \Leftrightarrow \{f(x) \cdot x^{-1}, x \in G\} = G. \quad (1 \text{ p})$$

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ fixat, cu proprietatea că există $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(x) \cdot f(a \cdot x) = x, (\forall) x \in G$.

a) Dacă $f(a) \cdot a = a \cdot f(a)$ să se arate că $f(a) \cdot f(a^{2n}) = a^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $(f(a^2))^{-1} = f(a^{-1})$.

Soluție și barem de corectare:

$$a) \quad f(a) \cdot a = a \cdot f(a) \Leftrightarrow f(a) \cdot a \cdot (f(a))^{-1} = a \Leftrightarrow a \cdot (f(a))^{-1} = (f(a))^{-1} \cdot a$$

Inducție

$$x = e \Rightarrow f(e) \cdot f(a) = e \Rightarrow (f(e))^{-1} = f(a) \Rightarrow f(a) \cdot f(e) = e \Rightarrow \text{proprietatea pt. } n = 0.$$

Presupunem $f(a) \cdot f(a^{2k}) = a^k$ și demonstrăm că $f(a) \cdot f(a^{2k+2}) = a^{k+1}$.

$$x = a^{2k} \Rightarrow f(a^{2k}) \cdot f(a^{2k+1}) = a^{2k}$$

$$x = a^{2k+1} \Rightarrow f(a^{2k+1}) \cdot f(a^{2k+2}) = a^{2k+1}$$

$$f(a^{2k}) \cdot f(a^{2k+1}) \cdot f(a^{2k+2}) = a^{2k} \cdot f(a^{2k+2}) \quad (1)$$

$$f(a^{2k}) \cdot f(a^{2k+1}) \cdot f(a^{2k+2}) = f(a^{2k}) \cdot a^{2k+1} \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) se obține } a^{2k} \cdot f(a^{2k+2}) = f(a^{2k}) \cdot a^{2k+1} \Rightarrow a^{2k} \cdot f(a^{2k+2}) = (f(a))^{-1} \cdot a^k \cdot a^{2k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{2k} \cdot f(a^{2k+2}) = a^{3k+1} \cdot (f(a))^{-1} \Rightarrow f(a^{2k+2}) = a^{k+1} \cdot (f(a))^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a^{2k+2}) = (f(a))^{-1} \cdot a^{k+1} \Rightarrow f(a) \cdot f(a^{2k+2}) = a^{k+1}. \quad (5 \text{ p})$$

$$b) \quad x = a^{-1} \Rightarrow f(a^{-1}) \cdot f(e) = a^{-1} \Rightarrow f(a^{-1}) = a^{-1} (f(e))^{-1} \Rightarrow f(a^{-1}) = a^{-1} \cdot f(a)$$

$$n = 1 \Rightarrow f(a) \cdot f(a^2) = a \Rightarrow f(a) = a \cdot (f(a^2))^{-1} \Rightarrow (f(a^2))^{-1} = a^{-1} \cdot f(a) \quad (2 \text{ p})$$